PRIRODNO-MATEMATIČKI FAKULTET
UNIVERZITETA U SARAJEVU

SPEKTRALNI TEOREM ZA POZITIBILNE J-UNITARNE I J-HERMITSKE OPERATORE

– magistarski rad

Sarajevo, oktobra 1984.

Branko Ćurgus

SADRŽAJ

Uvod i

I. Geometrija Kreinovih prostora 1

II. J-spektralne funkcije 55

III. Pozitibilni J-unitarni operatori. Spektralni teorem . . . 70

IV. Pozitibilni J-hermitski operatori . . . 123

V. Invarijantni potprostori ograničenih pozitibilnih J-hermitskih operatora . . 137

Literatura 155

Indeks i popis nekih oznaka 157

U V O D

Jedan od značajnih teorema teorije linearnih operatora u Hilbertovom prostoru je spektralni teorem za unitarne i hermitske operatore (vidi na pr. [12], [3], [4]). Taj teorem tvrdi da za unitaran (resp. hermitski) operator U (resp. A) u Hilbertovom prostoru postoji jedinstvena spektralna funkcija E_U (resp. E_A) takva da je

$$U = \int_{\mathbb{C}} \lambda \, dE_U(\lambda) \qquad \left(\text{resp.} \quad A = \int_{\mathbb{R}} \lambda \, dE_A(\lambda)\right).$$

Osnovni sadržaj ovog magistarskog rada čini dokaz analognog spektralnog teorema za pozitibilne J-unitarne i J-hermitske operatore u Kreinovom prostoru. Ovaj teorem dokazali su za J-hermitske operatore u Pontrjaginovom prostoru, M. G. Krein i H. Langer [7]. U radu [14] dokazan je spektralni teorem za pozitibilne J-unitarne i J-hermitske operatore u Kreinovom prostoru. Tu su pored ostalog date i primjene ovog teorema na problem egzistencije invarijantnog maksimalnog pozitivnog potprostora za J-hermitske operatore i na nelinearan problem svojstvene vrijednosti. Teorija pozitibilnih J-hermitskih operatora ima primjenu i u spektralnoj teoriji simetričnih običnih diferencijalnih operatora sa težinskom funkcijom koja mijenja znak (vidi Daho, K., Langer, H.: Sturm-Liouville operators with an indefinite weight function, Proc. Roy. Soc. Edinburgh, Sect. A, 78(1977), 161-191, i Daho, K. Y.: Spectral theory of symmetric ordinary differential operators with an indefinite weight function, Uppsala Universty, Department of Mathematics, Report No.1(1979)).

Ovaj magistarski rad sastoji se od pet dijelova. U prvom dijelu definisani su osnovni pojmovi vezani za Kreinove prostore i dokazani su neki osnovni teoremi. U izlaganju, do korolara 1.17. uglavnom se slijedi [1], a od korolara 1.17. do Caylejeve transformacije [15], dok je dio o Cayleјevoj transformaciji preuzet iz [2]. Od tvrdnji iz ovog dijela naročito ističem teorem 1.11. Ovaj teorem dokazao je R. S. Phillips, a dokaz dat u ovom radu je H. Langera (neobjavljena predavanja, Univerztet u Torontu, 1967). Ovaj teorem, zajedno sa spektralnim teoremom predstavlja glavno oruđe u dijelu V.

U dijelu II definišu se pojmovi J-spektralne funkcije i svojstvene spektralne funkcije operatora i dokazuju se neki teoremi u vezi sa ovim pojmovima. Suštinska razlika u odnosu na spektralnu funkciju u Hilbertovom prostoru je postojanje kritičnih tačaka. Ovdje ističem teorem 2.4. koji daje karakterizaciju regularnih kritičnih tačaka J-spektralne funkcije. Ova karakterizacija je značajna jer se područje definicije J-spektralne funkcije može proširiti (sa $\mathcal{A}(S\backslash c)$) na algebru podskupova skupa S generisanu svim intervalima iz S čije krajnje tačke nisu singilarne kritične tačke. Napomenimo ovdje da se mnoge tvrdnje u kojima se pojavljuju kritične tačke mogu pojačti kada se radi o regularnim kritičnim tačkama.

U dijelu III konstruisan je funkcionalni račun (teorem 3.7. i razmatranja poslije njega), a time i svojstvena spektralna funkcija (teorem 3.9.) za pozitibilan J-unitaran operator. Termin pozitibilan (engl. positizable) preuzet je od J. Bognára [2]. Inače mnogo češći termin (koji potiče od H. Langera) je definitibilan (engl. definitizable). U [14] dokazan je spektralni teorem za pozitibilne J-unitarne operatore i, koristeći Cayleјevu transformaciju, za pozitibilne J-hermitske operatore. Spektralna funkcija u [14] konstruisana je integracijom rezolvente duž pogodnih krivih i funkcionalni račun dat je upotrebom spektralne funkcije. Neki rezultati iz [14], za pozitibilne J-hermitske operatore objavljeni su u [17]. U [9] spektralni teorem je dokazan za pozitibilne J-hermitske operatore. Tu je konstruisan funkcionalni račun, a time i spektralna funkcija, neprekidnim proširenjem Riesz-Dunfordovog funkcionalnog računa. U ovom magistarskom radu, pri konstrukciji funkcionalnog računa za pozitibilne J-unitarne operatore korištene su ideje iz [9]. Neki koraci u konstrukciji funkcionalnog računa datoj ovdje razlikuju se od onih u [9], na pr. razmatranja poslije jednakosti (3.8). Ovaj pristup konsrukciji spektralne funkcije omogućio je da se teorem 3.2. iz [14] izrekne potpunije i dokaže nešto drukčije (vidi teorem 3.11.). U ovom radu je takođe dat potpun opis minimalnog pozitivirajućeg trigonometrijskog polinoma pozitibilnog J-unitarnog operatora (lema 3.8., teorem 3.10., propozicija 3.19.) koji je u [14] samo skiciran. Napomenimo još da se dokaz spektralnog teorema za ograničene J-pozitivne operatore može naći u [1], a za neograničene J-pozitivne operatore sa nepraznim rezolventnim skupom u [5]. Metod korišten u [1] bitno koristi J-pozitivnost i ograničenost operatora A. Koristeći ovo spektralna funkcija operatora A dobija se pomoću spektralne funkcije pogodno definisanog hermitskog operatora u Hilbertovom prostoru dobijenom kompletizacijom polaznog Kreinovog prostora u odnosu na pozitivan skalarni produkt [A·, ·]. Metod korišten u [5] je sličan metodu u [14].

Kao što je već rečeno u dijelu IV rezultati iz III se prenose na pozitibilne J-hermitske operatore pomoću Caylejeve transformacije. Ovaj dio preuzet je iz [14]. U dijelu V dokazani su neki teoremi o egzistenciji maksimalnog pozitivnog potprostora invarijantnog za operatore iz komutativne familije ograničenih pozitibilnih J-hermitskih operatora. U izlaganju praćen je [16]. Pored toga formulisani su analogni teoremi za J-unitarne operatore.

lo

I. GEOMETRIJA KREINOVIH PROSTORA

Neka F označava kompleksan vektorski prostor. Preslikavanje $[\cdot,\cdot]$ sa $F \times F$ u skup kompleksnih brojeva $\mathbb{C}$ zvaćemo <u>skalarni produkt</u> na vektorskom prostoru F ako su za sve x_1, x_2, x, y iz F i sve α_1, α_2 iz $\mathbb{C}$ ispunjeni uslovi

$$[\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2, y] = \alpha_1 [x_1, y] + \alpha_2 [x_2, y] \qquad (1.1)$$

$$[x,y] = \overline{[y,x]} \qquad (1.2)$$

Broj $[x,y]$ (x,y iz F) zovemo skalarni produkt vektora x i y.

Za proizvoljan potprostor E vektorskog prostora F definišemo

$$E^{\perp} = \{x \in F: [x,E] = \{0\}\}.$$

Očigledno $E^{\perp}$ je potprostor prostora F.

Za skalarni produkt $[\cdot,\cdot]$ na vektorskom prostoru F kažemo da je:

- <u>degenerisan</u> (<u>nedegenerisan</u>) na potprostoru E ako je $E \cap E^{\perp} \neq \{0\}$ ($E \cap E^{\perp} = \{0\}$), pri tome se potprostor $E \cap E^{\perp}$ naziva izotropni dio potprostora E.
- <u>indefinitan</u> na potprostoru E ako postoje vektori x i y iz E za koje je $[x,x] < 0$ i $[y,y] > 0$,
- <u>semidefinitan</u> na potprostoru E ako nije indefinitan na potprostoru E
- <u>pozitivan</u> (<u>negativan</u>) na potprostoru E ako za sve x iz E vrijedi $[x,x] \geq 0$ ($[x,x] \leq 0$)

- definitan na potprostoru E ako je semidefinitan na potprostoru E i ako $[x,x] = 0$ i x iz E povlači da je $x = 0$.

Neka je E potprostor vektorskog prostora F na kome je skalarni produkt $[\cdot,\cdot]$ nedegenerisan. Tada familija polunormi

$$p_y(x) = |[x,y]| \qquad (x,y \in E)$$

definiše lokalno konveksnu Hausdorfovu topologiju na E koju zovemo $w_{[,]}$-topologija na E.

DEFINICIJA 1.1. Kompleksan vektorski prostor H na kome je definisan indefinitan skalarni produkt $[\cdot,\cdot]$ je Kreinov prostor ako postoji pozitivno definitan skalarni produkt $(\cdot,\cdot)$ na H sa kojim H postaje Hilbertov prostor i ako u tom Hilbertovom prostoru postoji linearna involucija J ($J^2 = I$, I identični operator na H) za koju je

$$[x,y] = (Jx,y) \qquad (x,y \in H). \tag{1.3}$$

Skalarni produkt $[\cdot,\cdot]$ u Kreinovom prostoru zove se indefinitni ili J-skalarni produkt. Sljedeća propozicija sakuplja neke jednostavne činjenice o Kreinovim prostorima.

PROPOZICIJA 1.1. Neka je H Kreinov prostor. Tada je involucija J iz definicije 1.1. hermitski i unitaran operator na H. Skalarni produkt $[\cdot,\cdot]$ je nedegenerisan na H i topologija $w_{[,]}$ se podudara sa slabom topologijom na Hilbertovom prostoru H.

Dokaz. Iz uslova (1.2) i (1.3) dobijamo da za operator J vrijedi $(Jx,y) = (x,Jy)$ za sve x,y iz H. Pošto je J i involucija odavde dobijamo da je $(Jx,Jx) = (x,x)$ za sve x iz H, pa je J i unitaran i hermitski operator. Za $x \in H \cap H^{\perp}$ imamo da je, prema (1.3), $(Jx,y) = 0$ za sve y iz H, a odavde $Jx = 0$ tj. $x = J^2x = 0$. Topologija $w_{[,]}$ definisana je familijom pseudonormi

$$p_y(x) = |[x,y]| \qquad (y \in H),$$

a slaba topologija na Hilbertovom prostoru H definisana je familijom pseudonormi

$$q_y(x) = |(x,y)| \qquad (y \in H)$$

Zbog $[x,y] = (Jx,y) = (x,Jy)$ i pošto je J sirjektivno preslikavanje ove dvije familije pseudonormi se poklapaju. Tako je propozicija dokazana.

Sljedeća propozicija pokazuje da topologija određena normom $\|\cdot\| : x \longmapsto (x,x)^{1/2}$ $(x \in H)$ na Kreinovom prostoru H zavisi samo od indefinitnog skalarnog produkta $[\cdot,\cdot]$, a ne i od definitnog skalarnog produkta $(\cdot,\cdot)$.

PROPOZICIJA 1.2. Neka je G vektorski prostor sa nedegenerisanim skalarnim produktom $[\cdot,\cdot]$. Tada su svake dvije normirane topologije koje su jače od $w_{[,]}$-topologije na G i sa kojima je G Banachov prostor identične. U takvoj normiranoj topologiji skalarni produkt $[\cdot,\cdot]$ je neprekidna funkcija dvije promjenljive.

Dokaz. Neka su $\|\cdot\|$, $\|\cdot\|'$ dvije norme sa kojima je G Banachov prostor i njima inducirane topologije neka su jače od $w_{[,]}$-topologije na G. Tada je sa $\|x\|'' := \|x\| + \|x\|'$ $(x \in G)$ definisana norma na G. Sa ovom normom G je Banachov prostor. Stvarno, ako je $(x_n;\ n=1,2,\ldots)$ Cauchyjev niz u odnosu na normu $\|\cdot\|''$ onda je on Cauchyjev i u odnosu na norme $\|\cdot\|$ i $\|\cdot\|'$, pa je i konvergentan u odnosu na ove norme, tj. postoje x_o i x_o' iz G takvi da $\|x_n - x_o\| \to 0$ $(n \to \infty)$ i $\|x_n - x_o'\|' \to 0$ $(n \to \infty)$. Pošto su topologije inducirane normama $\|\cdot\|$ i $\|\cdot\|'$ jače od topologije $w_{[,]}$ i ova topologija je Hausdorfova odavde slijedi da je $x_o = x_o'$ i da $\|x_n - x_o\|'' \to 0$ $(n \to \infty)$. Prema definiciji je $\|x\| \leqslant \|x\|''$ za sve x iz G pa su prema jednom poznatom teoremu ([12] Korolar 1. str.4oo) norme $\|\cdot\|$ i $\|\cdot\|''$ ekvivalentne. Isto tako ekvivalentne su i norme $\|\cdot\|'$ i $\|\cdot\|''$ pa su i norme $\|\cdot\|$ i $\|\cdot\|'$ ekvivalentne.

Za svako $z \in G$ linearni funkcional $f_z :\ x \mapsto [x,z]$ $(x \in G)$ je očigledno neprekidan u $w_{[,]}$-topologiji na G, pa i u topologiji induciranoj sa normom $\|\cdot\|$. Dakle za svaki z iz G skup $\{|[x,z]| : \|x\| \leqslant 1\}$ je ograničen, pa je, za svako z iz G, ograničen i skup $\{|[z,y]| : \|y\| < 1\} =$ $= \{|f_y(z)| : \|y\| < 1\}$. Prema principu uniformne ograničenosti ([12] Teorem 2. str.333) je $\sup\{\|f_y\| : \|y\| < 1\} < \infty$. Označimo li posljednji supremum sa γ imamo da je

$$|[x,y]| \leqslant \gamma \|x\| \|y\| \quad \text{za sve } x,y \text{ iz } G.$$

Odavde slijedi da je skalarni produkt $[\cdot,\cdot]$ neprekidna funkcija dvaju promjenljivih na Banachovom prostoru G sa normom $\|\cdot\|$. Time je propozicija dokazana.

Neka H sada označava Hilbertov prostor na kome je pored pozitivno definitnog skalarnog produkta $(\cdot,\cdot)$ zadat i indefinitan skalarni produkt $[\cdot,\cdot]$ koji je neprekidna funkcija na $H \times H$. Tada postoji jedinstven ograničen hermitski operator $S: H \longrightarrow H$ za koji vrijedi:

$$[x,y] = (Sx,y) \qquad (x,y \in H) \qquad (1.4)$$

([12] § 3 Teorem 5 i Korolar 6). Pošto je skalarni produkt $[\cdot,\cdot]$ indefinitan spektar operatora S sadrži i pozitivne i negativne brojeve ([12] Teorem 7. str.185).

TEOREM 1.3. Sljedeće izjave su ekvivalentne:

(i) Nula pripada rezolventnom skupu $\rho(S)$ operatora S iz gornjih razmatranja;

(ii) Vektorski prostor H sa indefinitnim skalarnim produktom $[\cdot,\cdot]$ je Kreinov prostor.

(iii) Indefinitan skalarni produkt $[\cdot,\cdot]$ je nedegenerisan na H i prostor H je nizovno kompletan u odnosu na $w_{[,]}$-topologiju na H.

Dokaz. (i) => (ii) Neka je $|S| = \sqrt{S^2}$. Tada je ([12] Teorem 1o. str.136) polarna dekompozicija operatora S data sa

$$S = |S|Q = Q\,|S|, \qquad (1.5)$$

gdje je Q unitaran operator. Pošto je S sirjektivan hermitski operator i operator $|S|$ je sirjektivan i iz (1.5) se lako vidi da je unitaran operator Q i hermitski, dakle involucija. Iz (1.5) se takođe vidi da je $|S| = S\,Q = Q\,S$, pa pošto $0 \in \rho(S)$ onda $0 \in \rho(|S|)$.

Operator $|S|$ je pozitivno semidefinitan pa vrijedi

$$m = \inf \{ (|S|x,x); (x,x) = 1 \} \geqslant 0$$

i $m \notin \rho(|S|)$. Dakle $m > 0$. Vrijedi nejednakost

$$m(x,x) \leqslant (|S|x,x) \leqslant \|S\|(x,x) \quad \text{za sve } x \text{ iz } H.$$

Odavde se vidi da skalarni produkti $(\cdot,\cdot)'$($(x,y)' := (|S|x,y)$) i $(\cdot,\cdot)$ induciraju na prostoru H ekvivalentne norme, pa je prostor $(H,(\cdot,\cdot)')$ Hilbertov prostor i vrijedi

$$[x,y] = (Sx,y) = (|S|Qx,y) = (Qx,y)' \text{ za sve } x \text{ i } y \text{ iz } H.$$

i Q je involucija. Prema tome $(H, [\cdot,\cdot])$ je Kreinov prostor.

(ii) $\Rightarrow$(iii) Ovo je posljedica Propozicije 1.1. i činjenice da je Hilbertov prostor H slabo nizovno kompletan ([12]zadatak 3. str.465).

(iii) $\Rightarrow$ (i) Pretpostavimo suprotno, da $0 \notin \rho(S)$. Pošto je S hermitski operator tada $0 \in \sigma_p(S)$ ili $0 \in \sigma_c(S)$. (Sa $\sigma_p(S)$ označen je tačkasti, a sa $\sigma_c(S)$ neprekidni spektar operatora S.) Ako $0 \in \sigma_p(S)$ tada postoji $y \in H$, $y \neq 0$ takav da je $Sy = 0$, pa je prema (1.4) $[y,x] = 0$ za sve x iz H. Ovo je suprotno sa pretpostavkom da je skalarni produkt $[\cdot,\cdot]$ nedegenerisan na H. Ako $0 \in \sigma_c(S)$ onda postoji $y_0 \in H \setminus S(H)$ i niz (y_n), $y_n \in S(H)$ za sve $n=1,2,\ldots$, tako da $y_n \to y_0$. Neka je $y_n = S(x_n)$, $x_n \in H$, za sve $n=1,2,\ldots$. Niz (x_n) je Cauchyjev u $w_{[,]}$-topologiji jer je niz (Sx_n) Cauchyjev u slaboj topologiji na H. Međutim, niz (x_n) nije konvergentan u $w_{[,]}$-topologiji, jer ako niz (x_n) konvergira ka x_o u $w_{[,]}$-topologiji onda niz (Sx_n) konvergira slabo ka Sx_o, pa je, prema izboru niza (y_n), $Sx_o = y_o$. Ovo je suprotno sa pretpostavkom da $y_o \notin S(H)$. Dakle (x_n) je Cauchyjev niz u $w_{[,]}$-topologiji koji nije $w_{[,]}$-konvergentan, što je suprotno sa pretpostavkom o nizovnoj kompletnosti prostora H u odnosu na $w_{[,]}$-topologiju. Tako je teorem dokazan.

Neka je sada H Kreinov prostor sa indefinitnim skalarnim produktom $[\cdot,\cdot]$ i sa fiksiranim definitnim skalarnim produktom $(\cdot,\cdot)$ koji zadovoljava uslove definicije 1.1. Svi pojmovi Hilbertovih prostora kao ortogonalnost (oznaka ($\perp$)), norma ($\|\cdot\|$), adjungovan operator ($\cdot^*$) odnose se na Hilbertov prostor H sa skalarnim produktom $(\cdot,\cdot)$, naravno ako drugačije nije izričito navedeno.

Neka su

$$P_+ = \frac{1}{2}(I + J) \quad \text{i} \quad P_- = \frac{1}{2}(I - J) \tag{1.6}$$

(J iz definicije 1.1. , I identični operator na H)ortogonalne projekcije na svojstvene potprostore operatora J koji pripadaju svojstvenim vrijednostima 1 i -1, respektivno. Stavimo: $H_+ = P_+ (H)$ i $H_- = P_- (H)$, Jasno je da je

$$H = H_+ (\dot{+}) H_- \tag{1.7}$$

(+ označava direktnu sumu dva potprostora iz H, $\dot{+}$ označava direktnu i J-ortogonalnu sumu, a $(\dot{+})$ direktnu, ortogonalnu i J-ortogonalnu sumu). Ovakvo razlaganje prostora H naziva se <u>kanonsko razlaganje</u> Kreinovog prostora H. Ovo razlaganje zavisi od izbora definitnog skalarnog produkta $(\cdot,\cdot)$ i u opštem slučaju nije jedinstveno. Na osnovu definicije projekcija P_+ i P_- očigledno je

$$(x,y) = \pm[x,y] \qquad \text{za } x,y \in H_\pm,$$

pa su prostori $(H_+,[\cdot,\cdot])$ i $(H_-,-[\cdot,\cdot])$ Hilbertovi prostori.

Vrijedi i obrnuto:

TEOREM 1.4. Ako je H prostor sa nedegenerisanim skalarnim produktom $[\cdot,\cdot]$ i ako postoje potprostori H_1 i H_2 prostora H takvi da je:

(i) $H = H_1 \dotplus H_2$;

(ii) $(H_1,[\cdot,\cdot])$ i $(H_2,-[\cdot,\cdot])$ su Hilbertovi prostori ;

onda je prostor H Kreinov prostor.

Dokaz. Neka su x i y iz H. Na osnovu (i) je $x = x_1 + x_2$, $y = y_1 + y_2$, $x_j, y_j \in H_j$, $j=1,2$. Definišimo skalarni produkt

$$(x,y) := [x_1,y_1] - [x_2,y_2].$$

Ovaj skalarni produkt je pozitivno definitan i suma u (i) je ortogonalna u odnosu na ovako definisan skalarni produkt. Skalarni produkti $[\cdot,\cdot]$ i $(\cdot,\cdot)$ podudaraju se na H_1, a skalarni produkti $-[\cdot,\cdot]$ i $(\cdot,\cdot)$ podudaraju se na H_2. Sada se lako vidi da je $(H,(\cdot,\cdot))$ Hilbertov prostor. Označimo sa P_j ortogonalni projektor u

Hilbertovom prostoru $(H,(\cdot,\cdot))$ na potprostor H_j $(j=1,2)$. Tada je $J = P_1 - P_2$ linearna involucija u prostoru H i vrijedi

$$(Jx,y) = [x,y] \qquad (x,y \in H)$$

Time je dokazano da je H Kreinov prostor i direktna suma u (i) je kanonsko razlaganje Kreinovog prostora H. Tako je teorem dokazan.

U vezi sa projekcijama P_+ i P_- iz (1.6) skalarne kvadrate $[x,x]$ i (x,x) vektora x iz H možemo izraziti na sljedeći način

$$[x,x] = \|P_+x\|^2 - \|P_-x\|^2 \tag{1.8}$$
$$(x,x) = \|P_+x\|^2 + \|P_-x\|^2 \tag{1.9}$$

DEFINICIJA 1.2. Ako za potprostore H_+ i H_- iz jednakosti (1.7) vrijedi

$$k = \min\{\dim H_+, \dim H_-\} < +\infty$$

onda se za Kreinov prostor $(H,[\cdot,\cdot])$ kaže da je <u>Pontrjaginov prostor</u> sa indeksom k ili Π_k-prostor.

Na osnovu razmatranja koja slijede (korolar 1.13., lema 1.5. i teorem 1.7.) vidi se da je definicija 1.2. nezavisna od kanonskog razlaganja (1.7) Kreinovog prostora H.

Za vektor x iz Kreinovog prostora H kažemo da je <u>pozitivan</u> (resp. <u>neutralan</u>, <u>negativan</u>) ako je $[x,x]>0$ (resp. $=0$, <0); dalje stavljamo:

$$\mathcal{P}_+ := \{x \in H : [x,x] \geqslant 0\} \ , \ \mathcal{P}_- = \{x \in H : [x,x] \leqslant 0\}$$

$$\mathcal{P}_0 = \mathcal{P}_+ \cap \mathcal{P}_-$$

Za potprostor F Kreinovog prostora H kažemo da je degenerisan (resp. nedegenerisan, indefinitan, semidefinitan, pozitivan, negativan, definitan) ako je skalarni produkt $[\cdot,\cdot]$ degenerisan (resp. nedegenerisan, indefinitan, semidefinitan,pozitivan, negativan, definitan) na potprostoru F. Za potprostor F kažemo da je neutralan ako on sadrži samo neutralne vektore iz Kreinovog prostora H.

Za definitan potprostor F Kreinovog prostora H kažemo da je uniformno pozitivan (negativan) ako postoji realan broj $\delta > 0$ tako da za sve x iz F vrijedi

$$[x,x] \geqslant \delta \|x\|^2 \quad ([x,x] \leqslant -\delta \|x\|^2) \tag{1.10}$$

Na osnovu propozicije 1.2. jasno je da uniformnost potprostora F ne zavisi od izbora definitnig skalarnog produkta na Kreinovom prostoru H. (Od izbora definitnog skalarnog produkta zavisi konstanta δ.)

Potprostor H_+ (H_-) je uniformno pozitivan (negativan) jer možemo uzeti $\delta = 1$.

Zatvorenje pozitivnog (resp. negativnog, uniformno pozitivnog, uniformno negativnog) potprostora je pozitivan (resp. negativan, uniformno pozitivan, uniformno negativan) potprostor. Zatvorenje pozitivno (negativno) definitnog potprostora ne mora biti pozitivno (negativno) definitan potprostor. To se vidi iz sljedećeg primjera. Uzmimo Kreinov prostor H kod koga je $\dim H_+ = \infty$. Zbog indefinitnosti skalarnog produkta $[\cdot,\cdot]$ i jednakosti (1.8) slijedi da je $\dim H_- > 0$. Neka je $(e_j)_{j=1}^{\infty}$ ortonormiran niz vektora iz prostora H_+, a f_1 jedinični vektor iz H_-. Neka je F potprostor prostora H koji se sastoji od elemenata oblika $\sum_{j=1}^{\infty} a_j e_j + b_1 f_1$ gdje su $a_j \in \mathbb{C}$, $j=1,2,\ldots$, samo konačan broj skalara a_j je različito od nule i $\sum_{j=2}^{\infty} a_j = a_1 = b_1$. Tada je F pozitivno definitan potprostor jer je

$$\left[\sum_{j=1}^{\infty} a_j e_j + b_1 f_1, \sum_{j=1}^{\infty} a_j e_j + b_1 f_1\right] = \sum_{j=2}^{\infty} |a_j|^2 \geqslant 0$$

i za proizvoljan izbor kompleksnih brojeva a_j $\sum_{j=2}^{\infty} |a_j|^2 = 0$ povlači da je za sve $j=2,3,\ldots$ $a_j = 0$ pa je i $a_1 = b_1 = \sum_{j=2}^{\infty} a_j = 0$ tj. $\sum_{j=1}^{\infty} a_j e_j + b_1 f_1 = 0$.

Niz vektora

$$e_1 + \frac{1}{n}\sum_{2}^{n+1} e_j + f_1 \in F \qquad (n=1,2,\ldots)$$

konvergira neutralnom nenultom vektoru e_1+f_1. Dakle, zatvorenje pozitivno definitnog potprostora F nije pozitivno definitan potprostor.

Za potprostor F Kreinovog prostora H kažemo da je <u>maksimalan semidefinitan</u> potprostor ako potprostor F nije strogo sadržan u nekom semidefinitnom potprostoru prostora H. Definicije maksimalnog pozitivnog, maksimalnog negativnog, maksimalnog definitnog, maksimalnog pozitivno definitnog, maksimalnog negativno

V semidefin

definitnog, maksimalnog uniformno pozitivnog i maksimalnog uniformno negativnog potprostora su analogne.

Očigledno da je svaki maksimalan pozitivan, maksimalan negativan, maksimalan uniformno pozitivan i maksimalan uniformno negativan potprostor zatvoren.

Za vektore x i y iz Kreinovog prostora H kažemo da su ortogonalni u odnosu na skalarni produkt $[\cdot,\cdot]$ ili J-ortogonalni (oznaka $x \perp y$) ako vrijedi $[x,y] = 0$. Za proizvoljan podskup B Kreinovog prostora H definišemo J-ortogonalni komplement skupa B:

$$B^{\perp} := \{x \in H: [x,B] = \{0\}\}.$$

Očigledno je $B^{\perp} = J(B^{(\perp)}) = (JB)^{(\perp)}$, gdje je $B^{(\perp)}$ ortogonalni komplement skupa B u odnosu na skalarni produkt $(\cdot,\cdot)$. Na osnovu ovoga i odgovarajućih jednakosti za ortogonalne komplemente u Hilbertovom prostoru, za potprostore F_1 i F_2 Kreinovog prostora H vrijede jednakosti

$$(F_1^{\perp})^{\perp} = Cl(F_1), \tag{1.11}$$

$$(F_1 + F_2)^{\perp} = F_1^{\perp} \cap F_2^{\perp}, \tag{1.12}$$

i ako su F_1 i F_2 zatvoreni potprostori

$$(F_1 \cap F_2)^{\perp} = Cl(F_1^{\perp} + F_2^{\perp}). \tag{1.13}$$

Ovdje i dalje, ako drugačije nije posebno napomenuto, $Cl(B)$, $B \subseteq H$, označava zatvorenje skupa B u Hilbertovom prostoru $(H,(\cdot,\cdot))$, pri čemu je $(\cdot,\cdot)$ skalarni produkt iz definicije 1.1. Ubuduće ćemo i bez posebne napomene smatrati da skalarni produkt $(\cdot,\cdot)$ na Kreinovom prostoru $(H,[\cdot,\cdot])$ zadovoljava uslove definicije 1.1. Na osnovu napomene koja je prethodila propoziciji 1.2. slijedi da je gore korišteno zatvorenje nezavisno od izbora pozitivno definitnog skalarnog produkta $(\cdot,\cdot)$, već zavisi samo od indefinitnog skalarnog produkta $[\cdot,\cdot]$. U daljem kada se o Kreinovom prostoru H govori kao o topološkom prostoru smatramo da je on snabdjeven topologijom koja je određena normom $x \longrightarrow (x,x)^{1/2}$ $(x \in H)$ i koja zavisi samo od indefinitnog skalarnog produkta $[\cdot,\cdot]$.

Neka je D_+ potprostor prostora H_+. Označimo sa $B_1(D_+,H_-)$ skup svih kontrakcija sa D_+ u H_-, tj. skup svih linearnih operatora K sa D_+ u H_-, za koje je $\|K\| \leqslant 1$. Skup svih <u>uniformnih kontrakcija</u> sa D_+ u H_- (tj. kontrakcija K za koje je $\|K\| < 1$) označimo sa $B_0(D_+,H_-)$. $B_0(D_+,H_-)$ je unutrašnjost jedinične kugle $B_1(D_+,H_-)$ u Banachovom prostoru svih ograničenih linearnih operatora sa D_+ u H_-. Sa $B_p(D_+,H_-)$ označimo skup svih <u>pravih kontrakcija</u> K sa D_+ u H_-, tj. skup svih kontrakcija K za koje je $\|Kx\| < \|x\|$ za sve $x \in D_+ \setminus \{0\}$. Za kontrakciju K iz $B_1(D_+,H_-)$ definišemo njen <u>graf</u> $G[K]$, sa:

$$G[K] := \{x + Kx : x \in D_+\}.$$

$G[K]$ je potprostor prostora H.

Za potprostor D_- prostora H_- skupovi $B_1(D_-,H_+)$, $B_0(D_-,H_+)$ i $B_p(D_-,H_+)$ definišu se analogno, takođe se analogno definiše $G[L]$ za svaku kontrakciju L iz $B_1(D_-,H_+)$.

U daljem ćemo većinu teorema formulisati za pozitivne potprostore Kreinovog prostora H. Na osnovu sljedeće primjedbe jasno je da odgovarajući teoremi vrijede i za negativne potprostore. Zamjenjujući skalarni produkt $[\cdot,\cdot]$ na Kreinovom prostoru H sa skalarnim produktom $[\cdot,\cdot]'$ definisanim sa $[x,y]' := -[x,y]$ $(x,y \in H)$ dobijamo opet Kreinov prostor koji označavamo sa H' i zovemo <u>suprotni prostor</u> prostora H.

LEMA 1.5. Neka je F pozitivan potprostor Kreinovog prostora H. Projekcija P_+ je obostrano jednoznačno i obostrano neprekidno preslikavanje sa F na P_+F.

Dokaz: Za $x \in F$ imamo da je $[x,x] \geqslant 0$, pa je prema (1.8) $\|P_-x\| \leqslant \|P_+x\|$. Odavde imamo da je $\|P_+x\|^2 = \|x\|^2 - \|P_-x\|^2 \geqslant \|x\|^2 - \|P_+x\|^2$, tj. $\|P_+x\|^2 \geqslant \frac{1}{2}\|x\|^2$. S druge strane je $\|P_+x\| \leqslant \|x\|$. Odavde se lako vidi da je P_+ obostrano jednoznačno i obostrano neprekidno preslikavanje sa F na P_+F i lema je dokazana.

TEOREM 1.6. Neka je D_+ potprostor prostora H_+. Za svaku kontrakciju K iz $B_1(D_+,H_-)$ (resp. $B_0(D_+,H_-)$, $B_p(D_+,H_-)$) njen graf $G[K]$ je pozitivan (resp. uniformno pozitivan, pozitivno definitan) potprostor Kreinovog prostora H. Obrnuto svaki pozitivan (resp. uniformno pozitivan, pozitivno definitan) potprostor F Kreinovog prostora H je graf neke kontrakcije K iz $B_1(D_+,H_-)$ (resp. $B_0(D_+,H_-)$, $B_p(D_+,H_-)$) gdje su D_+ i K određeni jednoznačno sa: $D_+ = P_+(F)$ i $K(P_+x) = P_-x$, x iz F.

Dokaz: Za proizvoljan $x+Kx$ (x iz D_+) iz $G[K]$ prema (1.8) vrijedi $[x + Kx, x + Kx] = \|x\|^2 - \|Kx\|^2$.

Ako je K iz $B_1(D_+,H_-)$, desna strana posljednje jednakosti je očigledno nenegativna pa je $G[K]$ pozitivan potprostor prostora H. Ako je K iz $B_p(D_+,H_-)$ za $x+Kx\neq 0$, $x\in D_+$ (ekvivalentno $x\neq 0$) desna strana posljednje jednakosti je pozitivna pa je $G[K]$ pozitivno definitan potprostor. Ako je $\|K\|<1$ onda je $(1-\|K\|^2)/(1+\|K\|^2)>0$, pa je zbog

$$\|x\|^2-\|Kx\|^2\geqslant(1-\|K\|^2)(\|x\|^2+\|Kx\|^2)/(1+\|K\|^2)\qquad (x\in D_+)$$

potprostor $G[K]$ uniformno pozitivan.

Obrnuto neka je F pozitivan potprostor. Stavimo $D_+:=P_+F$. Prema prethodnoj lemi sa $K(P_+x)=P_-x$ $(x\in F)$ je dobro definisana kontrakcija iz $B_1(D_+,H_-)$ i očigledno je $F=G[K]$. Ako je F uniformno pozitivan potprostor uvrštavajući (1.8) i (1.9) u (1.lo) dobijamo da je

$$\|P_-x\|^2\leqslant\frac{1-\delta}{1+\delta}\|P_+x\|^2\qquad (x\in F)$$

odakle, zbog $\delta>0$ vidimo da je $\|K\|<1$. Ako je F pozitivno definitan potprostor za $P_+x\neq 0$ $(x\in F)$ imamo da je i $x\neq 0$ pa je $[x,x]=\|P_+x\|^2-\|P_-x\|^2>0$ tj. $\|K(P_+x)\|<\|P_+x\|$. Dakle K pripada skupu $B_p(D_+,H_-)$. Tako je teorem dokazan.

Neka je F pozitivan potprostor Kreinovog prostora H. Kontrakcija K iz teorema 1.6. za koju vrijedi $F=G[K]$ zove se <u>ugaoni operator</u> potprostora F. Ugaoni operator negativnog potprostora definiše se analogno.

TEOREM 1.7. Pozitivan (resp. uniformno pozitivan, pozitivno definitan) zatvoren potprostor F Kreinovog prostora H je maksimalan pozitivan (resp. uniformno pozitivan, pozitivno definitan) potprostor ako i samo ako je $P_+F = H_+$.

Dokaz. Prema lemi 1.5. pozitivan potprostor F_1 je strogo sadržan u pozitivnom potprostoru F_2 ako i samo ako potprostor $P_+(F_2)$ strogo sadrži potprostor $P_+(F_1)$. Dakle ako je $P_+F = H_+$ onda je F maksimalan potprostor odgovarajuće pozitivnosti.

Obrnuto, neka je F pozitivan (resp. uniformno pozitivan, pozitivno definitan) zatvoren potprostor i $P_+F \neq H_+$. Potprostor P_+F prostora H_+ je prema lemi 1.5 zatvoren pa postoji vektor $x \neq 0$ iz H_+ koji je ortogonalan na potprostor P_+F. Pošto je vektor x i J-ortogonalan na potprostor F, potprostor generisan sa F i x je pozitivan (resp. uniformno pozitivan, pozitivno definitan) i strogo sadrži F. Dakle F nije maksimalan potprostor. Ovim je teorem dokazan.

Iz ovog teorema vidi se da je maksimalan uniformno pozitivan, maksimalan zatvoren pozitivno definitan potprostor istovremeno i maksimalan pozitivan potprostor.

KOROLAR 1.8. Preslikavanje $K \longmapsto G[K]$ je bijekcija sa $B_1(H_+,H_-)$ na familiju svih maksimalnih pozitivnih potprostora. Ovo preslikavanje prevodi skup $B_0(H_+,H_-)$ (resp. $B_p(H_+,H_-)$) na familju svih maksimalnih uniformno pozitivnih (resp. maksimalnih zatvorenih pozitivno definitnih) potprostora.

Analogno preslikavanje $L \longmapsto G[L]$, $L \in B_1(H_-,H_+)$, je bijekcija sa $B_1(H_-,H_+)$ na familju svih maksimalnih negativnih potprostora.

KOROLAR 1.9. Preslikavanje $F \mapsto F^{\perp}$ je bijekcija sa familije maksimalnih pozitivnih (resp. maksimalnih uniformno pozitivnih, maksimalnih zatvorenih pozitivno definitnih) potprostora na familiju maksimalnih negativnih (resp. maksimalnih uniformno negativnih, maksimalnih zatvorenih negativno definitnih) potprostora.

Dokaz: Ova tvrdnja je posljedica prethodnog korolara, napomene poslije njega, jednostavne činjenice da je

$$G[K]^{\perp} = G[K^*]$$

za $K \in B_1(H_+, H_-)$ i da je sa $K \mapsto K^*$ dato obostrano jednoznačno preslikavanje sa $B_1(H_+, H_-)$ na $B_1(H_-, H_+)$. Posljednje preslikavanje očigledno prevodi $B_o(H_+, H_-)$ na $B_o(H_-, H_+)$. Ono prevodi $B_p(H_+, H_-)$ na $B_p(H_-, H_+)$ jer za $K \in B_p(H_+, H_-)$ i $y \in H_-$, $y \neq 0$ imamo da je $\|K^*y\| < \|y\|$ ako je $K^*y = 0$, a i ako je $K^*y \neq 0$ jer je

$$\|K^*y\|^2 = (K^*y, K^*y) = (KK^*y, y) \leqslant \|KK^*y\| \, \|y\| < \|K^*y\| \, \|y\| \leqslant \|y\|^2 \qquad (y \in H_- \setminus \{0\}).$$

Preslikavanje iz tvrdnje može se predstaviti kao kompozicija preslikavanja inverznog preslikavanju iz korolara 1.8., preslikavanja $K \mapsto K^*$ i preslikavanja iz napomene poslije korolara 1.8., pa se osobine tog preslikavanja lako vide.

KOROLAR 1.1o. Neka je Kreinov prostor $(H, [\cdot\,,\cdot])$ predstavljen kao direktna J-ortogonalna suma Kreinovih prostora $(H_j, [\cdot\,,\cdot])$, $j=1,\ldots,n$. Neka je M_j maksimalan pozitivan potprostor prostora H_j, $j=1,\ldots,n$. Tada je potprostor

$$M = M_1 + \ldots + M_n$$

maksimalan pozitivan potprostor prostora H.

Dokaz. Očigledno, dovoljno je dokazati korolar za $n=2$. Neka H_j^+ i H_j^- označavaju komponente kanonskog razlaganja Kreinovog prostora H_j i neka P_j^+, P_j^-, $j=1,2$ označavaju odgovarajuće projekcije. Tada je prikaz

$$H = (H_1^+ + H_2^+) + (H_1^- + H_2^-) \qquad (1.14)$$

jedno kanonsko razlaganje prostora H (vidjeti teorem 1.4). Pošto je potprostor M_j maksimalan pozitivan potprostor prostora H_j prema teoremu 1.6. je $P_j^+ M_j = H_j^+$, $j=1,2$. Očigledno je $P^+ = P_1^+ + P_2^+$ projekcija koja u kanonskom razlaganju (1.14) odgovara potprostoru $H_1^+ + H_2^+$. Vrijedi:

$$P^+M = P_1^+ M_1 + P_2^+ M_2 = H_1^+ + H_2^+ .$$

Na osnovu prethodnog teorema odavde slijedi da je potprostor M maksimalan pozitivan potprostor prostora H. Ovim je korolar dokazan.

TEOREM 1.11. Neka je F_o pozitivan (resp. uniformno pozitivan, zatvoren pozitivno definitan) potprostor i E_o negativan (resp. uniformno negativan, zatvoren negativno definitan) potprostor J-ortogonalan na F_o. Tada postoji maksimalan pozitivan (resp. maksimalan uniformno pozitivan, maksimalan zatvoren pozitivno definitan) potprostor F koji sadrži F_o i J-ortogonalan je na E_o.

Dokaz. Pošto je indefinitan skalarni produkt $[\cdot,\cdot]$ neprekidan na Hilbertovom prostoru H možemo smatrati da su potprostori F_o i E_o zatvoreni. Tada su prema lemi 1.5. (odnosno njenom negativnom analogonu) zatvoreni i potprostori $D_+ := P_+(F_o)$ i $D_- := P_-(E_o)$. Označimo sa P_1 resp. P_2 ortogonalne projekcije na D_+ i D_-. Prema teoremu 1.6. postoje kontrakcija K iz $B_1(D_+,H_-)$ (resp. $B_o(D_+,H_-)$, $B_p(D_+,H_-)$) i kontrakcija L iz $B_1(D_-,H_+)$ (resp. $B_o(D_-,H_+)$, $B_p(D_-,H_+)$) takve da je $G[K] = F_o$ i $G[L] = E_o$. Stavimo $L_2 = LP_2$. Tada je L_2 kontrakcija (resp. uniformna kontrakcija, prava kontrakcija) definisana na cijelom prostoru H. Pretpostavka $E_o \perp F_o$ je ekvivalentna sa

$$[x + Kx, P_2y + L_2y] = 0 \qquad (x \in D_+, y \in H)$$

ili ekvivalentno

$$(x, L_2y) = (Kx, P_2y) \qquad (x \in D_+, y \in H).$$

Odavde je:

$$P_2Kx = L_2^*x \qquad (x \in D_+) \tag{1.15}$$

Posljednja jednakost je potreban i dovoljan uslov da bi pozitivan potprostor $G[K]$ bio J-ortogonalan na E_o.

Prema teoremu 1.7. da bi našli maksimalan pozitivan (resp. maksimalan uniformno pozitivan, maksimalan zatvoren pozitivno definitan) potprostor čije se postojanje tvrdi u teoremu dovoljno je naći kontrakciju S iz $B_1(H_+,H_-)$ (resp. $B_o(H_+,H_-)$, $B_p(H_+,H_-)$) koja zadovoljava uslove

$$Sx = Kx \qquad (x \in D_+) \tag{1.16}$$

i analogno sa (1.15)

$$P_2Sx = L_2^*x \qquad (x \in H_+) \tag{1.17}$$

Stavimo $\gamma := \max\{\|K\|, \|L\|\}$. Pošto jednakost (1.17) možemo shvatiti kao definiciju prvog člana u prikazu $S = P_2S + (I - P_2)S$, ostaje da izaberemo operator $(I - P_2)S$ tako da on bude proširenje operatora $(I - P_2)K$ sa domenom H_+, rangom sadržanim u $(I - P_2)H_-$ i, da bi bilo $\|S\| \leqslant \gamma$, tako da je

$$\|(I - P_2)Sx\|^2 \leqslant \gamma^2\|x\|^2 - \|L_2{}^*x\|^2 \qquad (x \in H_+) \qquad (1.18)$$

Neka je $A := \gamma^2 I_+ - L_2L_2^*$. Definišimo novi skalarni produkt

$$(x,y)_A := (Ax,y) \qquad (x,y \in H_+) \qquad (1.19)$$

na prostoru H_+.
Ovako definisan skalarni produkt je pozitivno semidefinitan. U slučaju kad je operator L prava kontrakcija i $\gamma = 1$ skalarni produkt definisan sa (1.19) je pozitivno definitan.

Neka je:

$$H_+^o := \{x \in H_+ : (x,x)_A = 0\} = \ker A$$

Na kvocijentnom vektorskom prostoru H_+/H_+^o pozitivan skalarni produkt $(\cdot,\cdot)_A$ inducira pozitivno definitan skalarni produkt $(\cdot,\cdot)^\wedge$. U odnosu na ovaj skalarni produkt prostor H_+/H_+^o može se kompletirati do Hilbertovog prostora H_A. Označimo sa Q kvocijentno preslikavanje sa H_+ na H_+/H_+^o, a sa V ulaganje prostora H^+/H_+^o u Hilbertov prostor H_A, na kome je skalarni produkt označen takođe sa $(\cdot,\cdot)^\wedge$.

Na osnovu jednakosti (1.15) za sve x iz D_+ vrijedi

$$\|(I - P_2)Kx\|^2 \leqslant \gamma^2\|x\|^2 - \|L_2^* x\|^2 = (x,x)_A \qquad (1.2o)$$

Iz ove nejednakosti slijedi da je sa

$$T_1(VQx) = (I - P_2)Kx \qquad (x \in D_+)$$

dobro definisan linearan operator T_1 na potprostoru $VQ(D_+)$ Hilbertovog prostora H_A sa vrijednostima u $(I - P_2)H_-$. Ovaj operator je zbog (1.2o) kontrakcija:

$$\|T_1(VQx)\|^2 \leqslant (VQx,VQx)^{\wedge} \qquad (x \in D_+).$$

Označimo sa W ortogonalnu projekciju na zatvorenje $Cl_{H_A}(VQ(D_+))$ potprostora $VQ(D_+)$ u Hilbertovom prostoru H_A . Neka je T neprekidno proširenje operatora T_1 na potprostor $CL_{H_A}(VQ(D_+))$. Naravno, kontrakcija T ima vrijednosti u zatvorenom potprostoru $(I - P_2)H_-$.

Stavimo:

$$(I - P_2)Sx := T(WVQx) \qquad (x \in H_+)$$

Ovako definisan operator $(I - P_2)S$ zadovoljava uslove (1.16), (1.17) i (1.18) : $(I - P_2)S$ ima domen H_+ , rang sadržan u $(I - P_2)H_-$, ovaj operator je proširenje operatora $(I - P_2)K$ jer za x iz D_+ imamo da je

$$(I - P_2)Sx = T(WVQx) = T(VQx) = T_1(VQx) = (I - P_2)Kx.$$

Operator $(I - P_2)S$ ispunjava i uslov (1.18) jer je za $x \in H_+$

$$\|(I - P_2)Sx\|^2 = \|T(WVQx)\|^2 \leq (WVQx,WVQx)^{\wedge} \leq$$
$$\leq (VQx,VQx)^{\wedge} = (Qx,Qx)^{\wedge} = (x,x)_A = \qquad (1.21)$$
$$= \gamma^2\|x\|^2 - \|L_2^* x\|^2.$$

Ovim je teorem za slučaj pozitivnih i uniformno pozitivnih potprostora dokazan.

Treba još samo dokazati da ako su operatori L i K prave kontrakcije da je tada i operator S prava kontrakcija. Kao što smo već rekli u tom slučaju je $\gamma = 1$ i $H_+^o = \{0\}$, pa je Q identično preslikavanje na H_+.

Pretpostavimo da postoji $x \in H_+$, $x \neq 0$ takav da je $\|Sx\| = \|x\|$, tj. $\|(I - P_2)Sx\|^2 = \|x\|^2 - \|P_2 Sx\|^2 = \|x\|^2 - \|L_2^* x\|^2$.
Odavde slijedi da u ovom slučaju u nizu nejednakosti (1.21) imamo sve jednakosti, odnosno da je

$$Vx \in Cl_{H_A}(V(D_+)).$$

Dokazaćemo da je ovo moguće samo u slučaju kada $Vx \in V(D_+)$ tj. kada $x \in D_+$. Tada se $\|Sx\| = \|x\|$ zbog (1.16) protivi pravoj kontraktivnosti operatora K.

Dokažimo što smo obećali. Označimo sa $\cdot^{\hat{\perp}}$ ortogonalni komplement u Hilbertovom prostoru H_A, a do kraja ovog dokaza sa $\cdot^{(\perp)}$ ortogonalni komplement u Hilbertovom prostoru $(H_+,(\cdot,\cdot))$. Jednostavan račun pokazuje da za proizvoljan potprostor D prostora H_+ vrijedi

$$(V(D))^{\hat{\perp}} \cap V(H_+) = V((A(D))^{(\perp)}) = V(A^{-1}(D^{(\perp)})) \subseteq (V(D))^{\hat{\perp}}$$

Sada imamo da je:

$$(Cl_{H_A}(V(D_+))) \cap V(H_+) = ((V(D_+))^{\hat{\perp}})^{\hat{\perp}} \cap V(H_+) \subseteq$$

$$(V(A^{-1}(D_+^{(\perp)})))^{\hat{\perp}} \cap V(H_+) = V((A(A^{-1}(D_+^{(\perp)})))^{(\perp)}) =$$

$$= V((D_+^{(\perp)} \cap \mathrm{ran} A)^{(\perp)}) = V(D_+^{(\perp)(\perp)} + (\mathrm{ran}(A))^{(\perp)}) =$$

$$= V(D_+^{(\perp)(\perp)} + \{0\}) = V(D_+).$$

Dakle: $Cl_{H_A}(V(D_+)) \cap V(H_+) \subseteq V(D_+)$. Ovdje je korišteno da je rang hermitske injekcije A gust potprostor u prostoru H_+. Teorem je dokazan.

KOROLAR 1.12. Svaki pozitivan (resp. uniformno pozitivan, zatvoren pozitivno definitan) potprostor F_o sadržan je u maksimalnom pozitivnom (resp. uniformno pozitivnom, zatvorenom pozitivno definitnom) potprostoru F.

Dokaz. Primijenimo teorem uzimajući $E_o = \{0\}$.

KOROLAR 1.13. Neka je F_o pozitivan, a E_o negativan potprostor. Ako je $F_o + E_o = H$ tada je F_o maksimalan pozitivan, a E_o maksimalan negativan potprostor.

Dokaz. Prema korolaru 1.12. potprostor F_o je sadržan u maksimalnom pozitivnom potprostoru F, dok je potprostor E_o sadržan u maksimalnom negativnom potprostoru E. Dovoljno je dokazati da je $F \cap E = \{0\}$, jer za x iz $F \setminus F_o$ imamo da je $x = x_o + y_o$, $x_o \in F_o$, $y_o \in E_o$, pa je $y_o = x - x_o \in E \cap F$.

Neka je K ugaoni operator potprostora F, a L ugaoni operator potprostora E. Uzmimo proizvoljno $w \in F \cap E$. Tada postoje $x_1 \in H_+$ i $y_1 \in H_-$ takvi da je

$$w = x_1 + Kx_1 = y_1 + Ly_1,$$

a odavde je

$$x_1 = LKx_1 \, .$$

Pošto je LK kontrakcija vrijedi i $(LK)^* x_1 = x_1$ tj.

$$(I_+ - (LK)^*)x_1 = 0, \tag{1.22}$$

gdje je sa I_+ označen identični operator na H_+.

S druge strane pošto je $F + E = H$ po pretpostavci, za svako $x_+ \in H_+$ postoje $x_2 \in H_+$ i $y_2 \in H_-$ takvi da je

$$x_+ = x_2 + Kx_2 + y_2 + Ly_2 \, .$$

Odavde je $x_+ = (I_+ - LK)x_2$, što znači da je $ran(I_+ - LK) = H_+$ ili, ekvivalentno, $ker(I_+ - (LK)^*) = \{0\}$. Sada (1.22) povlači da je $x_1 = 0$ tj. $w = 0$.

KOROLAR 1.14. Zatvoren pozitivan (resp. uniformno pozitivan, pozitivno definitan) potprostor F_0 je maksimalan pozitivan (resp. uniformno pozitivan, pozitivno definitan) potprostor ako i samo ako je potprostor $F_0^{\perp}$ negativan.

Dokaz. Jedan smjer ekvivalencije slijedi iz korolara 1.9. Dokažimo i drugi smjer. Neka je, potprostor $F_0^{\perp}$ negativan. Prema korolaru 1.12. potprostor F_0 sadržan je u maksimalnom pozitivnom (resp. uniformno pozitivnom, zatvorenom pozitivno definitnom) potprostoru F. Potprostor $F^{\perp}$ je maksimalan negativan potprostor i vrijedi $F^{\perp} \subseteq F_0^{\perp}$. Ovo je moguće samo ako je $F^{\perp} = F_0^{\perp}$. Koristeći jednakost (1.11) odavde dobijamo da je $Cl(F) = Cl(F_0)$.

Pošto su prostori F i F_0 zatvoreni, ovo znači da je F_0 maksimalan pozitivan (resp. uniformno pozitivan, pozitivno definitan) potprostor.

Za potprostor F Kreinovog prostora H kažemo da je <u>J-ortogonalno dopunjiv</u> ako vrijedi

$$F \dot{+} F^{\perp} = H \tag{1.23}$$

PROPOZICIJA 1.15. Neka je F J-ortogonalno dopunjiv potprostor Kreinovog prostora H. Tada je skalarni produkt $[\cdot\,,\cdot]$ nedegenerisan na potprostoru F, pa je suma (1.23) direktna. Potprostor F je zatvoren u odnosu na $w_{[,]}$-topologiju na H i $w_{[,]}$-topologija na F podudara se sa topologijom koju na F inducira $w_{[,]}$-topologija na H.

Dokaz. Neka je $x \in F \cap F^{\perp}$. Tada je $[x,y] = 0$ za sve y iz F, jer je x iz $F^{\perp}$, i $[x,y'] = 0$ za sve y' iz $F^{\perp}$ jer je x iz F. Sabiranjem posljednje dvije jednakosti, prema (1.23), dobijamo da je $[x,w] = 0$ za sve w iz H, i odatle $x = 0$.

$w_{[,]}$-topologija na H je najslabija topologija na H u odnosu na koju je, za sve y iz H, linearan funkcional $x \longmapsto [x,y],\, x \in H$, neprekidan. Neka je $(x_a)_{a\in \mathcal{J}}$ hiperniz iz potprostora F koji u odnosu na $w_{[,]}$-topologiju na H konvergira ka x_0. Tada za svako w iz H hiperniz kompleksnih brojeva $([x_a,w])_{a\in \mathcal{J}}$ konvergira ka $[x_0,w]$. Specijalno za x iz $F^{\perp}$ dobijamo da je $[x_0,x]=0$. Neka je $x_0 = x_0' + x_0''$, x_0' iz F, x_0'' iz F. Tada za sve x iz $F^{\perp}$ vrijedi $0 = [x_0,x] = [x_0' + x_0'',x] = [x_0'',x]$. Odavde je $x_0'' = 0$, na osnovu prvog dijela propozicije i činjenice da je i $F^{\perp}$ J-ortogonalno dopunjiv potprostor.

Dakle $x_o = x'_o \in F$ i potprostor F je zatvoren u odnosu na $w_{[,]}$-topologiju na H.

Hiperniz $(x_a)_{a\in\mathcal{J}}$ elemenata iz F konvergira ka $x_o \in F$ u $w_{[,]}$-topologiji na H akko hiperniz $([x_a,w])_{a\in\mathcal{J}}$ konvergira ka $[x_o,w]$ za sve w iz H, tj. akko hiperniz $([x_a, x'+x''])_{a\in\mathcal{J}}$ konvergira ka $[x_o, x'+x'']$ za sve x' iz F i sve x'' iz $F^{\perp}$. Ovo je ekvivalentno konvergenciji hiperniza $([x_a,x'])_{a\in\mathcal{J}}$ ka $[x_o,x']$ za sve x' iz F, a to je upravo konvergencija u $w_{[,]}$-topologiji na F. Tako je propozicija dokazana.

Na osnovu jednakosti (1.23) svako x iz H možemo pisati u obliku

$$x = y + y_1, \quad y \in F, \quad y_1 \in F^{\perp} \tag{1.24}$$

Vektor y u prikazu (1.24) naziva se <u>J-ortogonalna projekcija</u> vektora x na potprostor F i ona je jednoznačno određena ako i samo ako je F J-ortogonalno dopunjiv potprostor. Operator $Q: x \mapsto y$ koji vektoru x iz H pridružuje njegovu J-ortogonalnu projekciju na J-ortogonalno dopunjiv potprostor F je linearan, $Q^2 = Q$ i taj operator naziva se <u>J-ortogonalni projektor</u> prostora H na potprostor F.

TEOREM 1.16. Neka je F potprostor Kreinovog prostora H. Sljedeće izjave su ekvivalentne:

(i) F je J-ortogonalno dopunjiv potprostor.

(ii) $(F, [\cdot,\cdot])$ je Kreinov prostor.

(iii) F je J-ortogonalna suma uniformno pozitivnog potprostora M i uniformno negativnog potprostora N.

Dokaz. (i)$\Rightarrow$(ii) Pošto je H kao Kreinov prostor sekvencijalno kompletan u odnosu na $w_{[,]}$ -topologiju na H i F zatvoren u odnosu na ovu topologiju, to je i F sekvencijalno kompletan u odnosu na $w_{[,]}$ -topologiju na H, a prema propoziciji 1.15. i u odnosu na $w_{[,]}$ -topologiju na F. Skalarni produkt $[\cdot,\cdot]$ je nedegenerisan na F pa teorem 1.3. povlači da je $(F,[\cdot,\cdot])$ Kreinov prostor.

(ii) $\Rightarrow$ (iii) Jednakost (1.7) za Kreinov prostor F glasi $F = F_+ + F_-$ i F_+ i F_- su J-ortogonalni potprostori i F_+ je uniformno pozitivan, a F_- uniformno negativan potprostor, pa možemo uzeti $M = F_+$, $N = F_-$.

(iii) $\Rightarrow$ (i) Uniformno pozitivan potprostor M sa skalarnim produktom $[\cdot,\cdot]$ je Hilbertov prostor, pa prema Rieszovom teoremu o reprezentaciji za proizvoljan vektor y iz H postoji m iz M tako da je

$$[x,y] = [x,m] \quad \text{za sve } x \text{ iz } M.$$

Analogno potprostor N je Hilbertov prostor sa skalarnim produktom $-[\cdot,\cdot]$ pa za vektor y iz H postoji $n \in N$ tako da je

$$[x,y] = [x,n] \quad \text{za sve } x \text{ iz } N.$$

Pošto je $F = M + N$ i M je J-ortogonalan na N sabirajući posljednje dvije jednakosti dobijamo da je

$$[x,y] = [x,m + n] \quad \text{za sve } x \text{ iz } F.$$

Odavde slijedi da je $y - (m + n)$ iz $F^{\perp}$, a $m + n$ je iz F pa je ovim pokazano da je $y \in F + F^{\perp}$ i teorem je dokazan.

Napomena: Označimo sa P ortogonalnu projekciju sa H na zatvoren potprostor F. Tada za restrikciju $PJ|F$ operatora PJ na potprostor F vrijedi $[x,y] = ((PJ|F)x,y)$ za sve x,y iz F. Na osnovu teorema 1.16 i teorema 1.3. F je J-ortogonalno dopunjiv potprostor akko je $0 \in \rho(PJ|F)$.

KOROLAR 1.17. Pozitivan (negativan) potprostor Kreinovog prostora H je J-ortogonalno dopunjiv ako i samo ako je uniformno pozitivan (negativan).

U daljem ćemo posmatrati samo linearne operatore u Kreinovom prostoru H čije je područje definicije gust podskup prostora H.

Za operator A iz H u H definišemo njemu J-adjungovani operator A^+ na sljedeći način: vektor $y \in H$ pripada definicionom području $\mathrm{dom}(A^+)$ operatora A^+ ako i samo ako postoji vektor $y^+ \in H$ tako da je

$$[Ax,y] = [x,y^+] \qquad (x \in \mathrm{dom}(A)).$$

U ovom slučaju vektor y^+ je jedinstven i stavljamo $A^+y := y^+$.

Jasno je da 0 uvijek pripada skupu $\mathrm{dom}(A^+)$ i da je operator A^+ linearan. Za operator A^+ vrijedi

$$[Ax,y] = [x,A^+y] \qquad (x \in \mathrm{dom}(A), y \in \mathrm{dom}(A^+)) \tag{1.25}$$

i od svih operatora koji zadovoljavaju gornju jednakost operator A^+ ima najveće definiciono područje.

LEMA 1.18. Za Hilbertov prostor H i operator J iz definicije 1.1. vrijedi

$$A^+ = JA^*J$$

pri čemu je operator A^* hermitski adjungiran operatoru A u Hilbertovom prostoru $(H,(\cdot,\cdot))$.

Dokaz. Za operator A^* vrijedi

$$(Ax,y) = (x,A^*y) \qquad (x\in \mathrm{dom}(A), y\in \mathrm{dom}(A^*)).$$

Na osnovu (1.3) i propozicije 1.1 odavde je

$$[Ax,y] = [x,JA^*Jy] \qquad (x\in \mathrm{dom}(A), y\in \mathrm{dom}(JA^*J)),$$

dakle vrijedi $A^+y = JA^*Jy$ za $y\in \mathrm{dom}(JA^*J)$ i $\mathrm{dom}(JA^*J)\subseteq \mathrm{dom}(A^+)$ (tj. $JA^*J\subseteq A^+$). Na isti način, polazeći od (1.25) dobijamo da je $A^*\supseteq JA^+J$, što je ekvivalentno sa $JA^*J\supseteq A^+$. Dakle $A^+ = JA^*J$. Lema je dokazana.

Na osnovu ove leme dobijamo mnoge osobine J-adjungovanih operatora kao posljedice poznatih osobina adjungovanih operatora u Hilbertovom prostoru. Ovdje su neke od njih.

TEOREM 1.19. a) $0^+ = 0$, b) $I^+ = I$, c) za svaki operator A postoji operator A^+ i A^+ je zatvoren operator, d) ako je A ograničen operator onda je i A^+ ograničen operator, e) $(\alpha A)^+ = \bar{\alpha}A^+ (\alpha\in \mathbb{C})$, f) $(A_1 + A_2)^+ \supseteq A_1^+ + A_2^+$, ako je skup $\mathrm{dom}(A_1)\cap \mathrm{dom}(A_2)$ gust u H, g) ako je A_2 ograničen operator onda je

$(A_1 + A_2)^+ = A_1^+ + A_2^+$, h) ako postoji A^{-1} i ako je skup $\mathrm{dom}(A^{-1})$ gust u H onda postoji $(A^+)^{-1}$ i vrijedi $(A^+)^{-1} = (A^{-1})^+$, i) ako vrijedi $[Ax,x] \in \mathbb{R}$, $x \in \mathrm{dom}(A)$ onda je $A \subseteq A^+$, j) za ograničen operator A iz $A \subseteq A^+$ slijedi $A = A^+$.

Dokaz. Za odgovarajuće osobine adjungovanih operatora u Hilbertovom prostoru vidjeti propoziciju 8.4 i teorem 8.7. u [12].

Ako je $\lambda \in \rho(A)$ (rezolventni skup operatora A, [12] str.417.) prema h), g), e) i b) iz teorema 1.19. imamo da je

$$((\lambda I - A)^{-1})^+ = (\bar{\lambda} I - A^+)^{-1}.$$

Neposredna posljedica ove jednakosti je jednakost

$$\sigma(A^+) = \overline{\sigma(A)} \tag{1.26}$$

(gdje je $\sigma(A)$ spektar operatora A, [12] str.419. i za $B \subseteq \mathbb{C}$, $\overline{B} = \{\bar{z};\ z \in B\}$).

Za operator A u Kreinovom prostoru H kažemo da je <u>J-hermitski</u> ako vrijedi $A = A^+$, tj. ako je $\mathrm{dom}(A) = \mathrm{dom}(A^+)$ i $Ax = A^+x$, $x \in \mathrm{dom}(A)$.

Prema teoremu 1.19. c) J-hermitski operator A je zatvoren i u daljem ćemo posmatrati isključivo zatvorene operatore iz Kreinovog prostora H u H koji, kao što je već ranije napomenuto imaju gusto područje definicije u H.

TEOREM 1.20.*) Neka je A J-hermitski operator u Kreinovom prostoru H. Tada vrijedi:

(i) spektar operatora A leži simetrično u odnosu na realnu osu, tj. vrijedi $\sigma(A) = \overline{\sigma(A)}$,

(ii) iz $z \in \sigma_p(A)$ slijedi $\bar{z} \in \sigma_p(A) \cup \sigma_r(A)$,

(iii) iz $z \in \sigma_r(A)$ slijedi $\bar{z} \in \sigma_p(A)$.

Dokaz. Tvrdnja (i) je neposredna posljedica jednakosti (1.26).

(ii) Neka je $z \in \sigma_p(A)$ i $x \neq 0$ odgovarajući svojstveni vektor. Pretpostavimo da operator $\bar{z}I - A$ preslikava skup $\mathrm{dom}(A)$ obostrano jednoznačno na skup $\mathrm{ran}(\bar{z}I - A)$ koji je gust u H, tj. $\bar{z} \in \sigma_c(A)$. Iz ove pretpostavke slijedi da postoji vektor y iz $\mathrm{dom}(A)$ za koji je

$$[x,(\bar{z}I - A)y] \neq 0$$

Pošto je A J-hermitski operator, na osnovu teorema 1.19. g) odavde slijedi da je

$$[(zI - A)x,y] \neq 0,$$

tj. $(zI - A)x \neq 0$, što je suprotno sa izborom vektora x. Dakle $\bar{z} \in \sigma_p(A) \cup \sigma_r(A)$.

(iii) Neka je $z \in \sigma_r(A)$. Tada potprostor $\mathrm{ran}(zI - A)$ nije gust u H, pa postoji vektor y iz H, $y \neq 0$ za koje je

$$[(zI - A)x,y] = 0 \qquad (x \in \mathrm{dom}(A))$$

dakle

$$[x,(\bar{z}I - A)y] = 0 \qquad (x \in \mathrm{dom}(A)).$$

Pošto je skup $\mathrm{dom}(A)$ gust u H, odavde slijedi da je

*) U ovom teoremu i u daljem sa $\sigma_p(A)$, $\sigma_c(A)$, $\sigma_r(A)$ označavamo tačkasti, neprekidni, rezidualni spektar operatora A ([12] str. 419).

$(\bar{z}I - A)y = 0$, tj. $\bar{z} \in \sigma_p(A)$. Ovim je teorem dokazan.

KOROLAR 1.21. Neka je operator A J-hermitski. Tada vrijedi

(i) skup $\sigma_p(A) \cup \sigma_r(A)$ leži simetrično u odnosu na realnu osu,

(ii) realne tačke ne pripadaju skupu $\sigma_r(A)$,

(iii) skup $\sigma_c(A)$ leži simetrično u odnosu na realnu osu.

Kao i u Hilbertovom prostoru ([12] korolar 8.12.) ako operator $A: H \to H$ ispunjava uslov

$$[Ax,y] = [x,Ay] \qquad (x,y \in H) \tag{1.27}$$

onda je on ograničen. Stvarno, ako operator A ispunjava uslov (1.27) onda operator JA ispunjava uslov

$$(JAx,y) = (x,JAy) \qquad (x,y \in H),$$

pa je prema korolaru 8.12. iz [12] operator JA ograničen i naravno hermitski operator na Hilbertovom prostoru $(H,(\cdot,\cdot))$. Pošto je $A = JJA$, A je kao kompozicija dvaju ograničenih operatora ograničen operator. Jasno je da iz (1.27) slijedi i $A = A^+$.

PROPOZICIJA 1.22. Operator $Q: H \to H$ je J-ortogonalni projektor na neki J-ortogonalno dopunjiv potprostor F Kreinovog prostora H ako i samo ako je Q ograničen, idempotentan J-hermitski operator, tj. ako i samo ako je $\mathrm{dom}(Q) = H$, $Q^2 = Q = Q^+$. Tada je

$$\mathrm{ran}(Q) = \{ x \in H: Qx = x \}$$

Dokaz. Neka je Q J-ortogonalni projektor na

J-ortogonalno dopunjiv potprostor F. Tada operator Q zadovoljava relaciju (1.27), pa je on ograničen J-hermitski operator. Očigledno je $Q^2 = Q$.

Neka je, obrnuto, Q ograničen operator i $Q^2 = Q = Q^+$. Stavimo

$$F = \{x \in H: Qx = x\}.$$

Očigledno je $F \subseteq \mathrm{ran}(Q)$, a zbog $Q^2 = Q$ je i $\mathrm{ran}(Q) \subseteq F$. Dakle $F = \mathrm{ran}(Q)$. Pošto je $Q = Q^+$ vrijedi

$$[y, x - Qx] = [y,x] - [y,Qx] = [y,x] - [Qy,x] = 0 \ (x \in H, y \in F),$$

pa je $x - Qx \in F^{\perp}$, $x \in H$. Sada je

$$x = Qx + (I - Q)x \in F + F^{\perp} \qquad (x \in H),$$

tj. F je J-ortogonalno dopunjiv potprostor i Q je J-ortogonalna projekcija na potprostor F. Time je propozicija dokazana.

LEMA 1.23. Neka su P i Q dvije J-ortogonalne projekcije na Kreinovom prostoru H za koje je $PQ=QP$ i $\mathrm{ran}(P) \subseteq \mathcal{P}_+$, $\mathrm{ran}(Q) \subseteq \mathcal{P}_+$. Tada je i $\mathrm{ran}(P) + \mathrm{ran}(Q) \subseteq \mathcal{P}_+$.

Dokaz. Tvrdnja leme je očigledna ako je $PQ = QP = 0$. U opštem slučaju tvrdnja leme slijedi iz činjenica da su $P - PQ$ i Q dvije J-ortogonalne projekcije čija su područja vrijednosti sadržana u $\mathcal{P}_+$, da je $(P - PQ)Q = Q(P - PQ) = 0$ i da je $\mathrm{ran}(P - PQ) + \mathrm{ran}(Q) = \mathrm{ran}(P) + \mathrm{ran}(Q)$.

Za potprostore F_1 i F_2 Kreinovog prostora H kažemo da čine <u>dualan par</u> potprostora u odnosu na skalarni produkt $[\cdot,\cdot]$ ako za svaki $x \in F_1$, $x \neq 0$, postoji $x' \in F_2$ i za svaki $y \in F_2$, $y \neq 0$, postoji $y' \in F_1$ tako da je

$$[x,x'] = [y,y'] = 1.$$

Očigledno je da za dualan par potprostora F_1 i F_2 prostor F_2 (resp. F_1) možemo shvatiti kao potprostor prostora svih ograničenih funkcionala na prostoru F_1 (resp. F_2). Na osnovu ovoga i teorema jedinstvenosti za konačno dimenzionalne prostore ([lo] 7.3. str.59) slijedi da je

$$\dim(F_1) = \dim(F_2),$$

pri čemu je dimenzija potprostora prostora H jednaka nekom prirodnom broju ili jednaka ∞.

PROPOZICIJA 1.24. Ako je Q ograničena linearna projekcija na H $(Q^2 = Q)$ tada potprostori QH i Q^+H čine dualan par potprostora u odnosu na skalarni produkt $[\cdot,\cdot]$.

Dokaz. Pretpostavimo da je $[x_o,x'] = 0$ za neko $x_o \in QH$ i sve $x' \in Q^+H$. Tada imamo da je

$$\{0\} = [x_o,Q^+H] = [Qx_o,H],$$

odakle je $Qx_o = x_o = 0$. Potpuno analogno vrijedi i za $y_o \in Q^+H$, pa je propozicija dokazana.

KOROLAR 1.25. Ako je Q ograničena linearna projekcija na H onda je

$$\dim(QH) = \dim(Q^+H)$$

Za operator A iz Kreinovog prostora H u H kažemo da je <u>J-pozitivan</u> ako vrijedi

$$[Ax,x] \geqslant 0 \qquad (x \in \mathrm{dom}(A)).$$

Prema teoremu 1.19. i) i j) ograničen J-pozitivan operator je J-hermitski operator.

Na potprostoru $\mathrm{dom}(A)$ prostora H sa

$$\langle x,y\rangle := [Ax,y] \qquad (x,y \in \mathrm{dom}(A))$$

definisan je pozitivan skalarni produkt i za njega vrijedi Schwarz-ova nejednakost

$$|\langle x,y\rangle|^2 \leqslant \langle x,x\rangle \langle y,y\rangle \qquad (x,y \in \mathrm{dom}(A)). \quad (1.28)$$

PROPOZICIJA 1.26. Tačkasti spektar J-pozitivnog operatora A je realan.

Dokaz. Neka je $z \in \sigma_p(A)$. Tada postoji vaktor $x \in \mathrm{dom}(A)$, $x \neq 0$ za koji vrijedi $Ax = zx$, pa i $[Ax,x] = z[x,x]$. Pošto je operator A J-pozitivan odavde je $z \in \mathbb{R}$ ili $[x,x] = 0$. Dokažimo da nije moguće da bude $[x,x] = 0$ i $z \notin \mathbb{R}$. Naime tada bi bilo i $[Ax,x] = 0$. Na osnovu nejednakosti (1.28) vrijedi

$$(Ax,Ax) = [Ax,JAx] \leqslant [Ax,x]^{1/2} [AJAx,JAx]^{1/2},$$

pa mora biti i $Ax = 0$ i odatle $x = 0$. Ovo je suprotno izboru vektora x. Dakle nije moguće da bude $[x,x] = 0$ i $z \notin \mathbb{R}$, pa je propozicija dokazana.

PROPOZICIJA 1.27. Spektar ograničenog J-pozitivnog operatora A je realan.

Dokaz. Kao što je već napomenuto ograničen J-pozitivan operator A je J-hermitski operator. Prema teoremu 1.20., korolaru 1.21. i propoziciji 1.26. je $\sigma_r(A) = \emptyset$. Treba još samo dokazati da je $\sigma_c(A) \subseteq \mathbb{R}$. Neka je $z \in \sigma_c(A)$. Tada postoji niz (x_n) vektora iz H, $\|x_n\| = 1$, $n = 1,2,\ldots$ i $\lim (zI - A)x_n = 0$. Iz propozicije 1.2. slijedi da je i

$$\lim ([Ax_n,x_n] - z[x_n,x_n]) = 0 \tag{1.29}$$

Kako je $[Ax_n,x_n] \in \mathbb{R}$, $n=1,2,\ldots$ treba samo pokazati da niz $([x_n,x_n])$ ne teži nuli kad $n \to \infty$, jer tada, prema (1.29), mora biti $\mathrm{Im}(z) = 0$, tj. $z \in \mathbb{R}$. Pretpostavimo sada da je $\lim [x_n,x_n] = 0$. Tada je zbog (1.29) i $\lim [Ax_n,x_n] = 0$. Koristeći nejednakost (1.28) dobijamo da je za sve $n=1,2,\ldots$

$$(Ax_n,Ax_n)^2 = [Ax_n,JAx_n]^2 \leq [Ax_n,x_n] \cdot [AJAx_n,JAx_n]$$

Skup $\{ [AJAx_n,JAx_n] \, , \, n=1,2,\ldots \}$ je prema propoziciji 1.2. ograničen jer je operator A ograničen i $\|x_n\| = 1$, $n=1,2,\ldots$. Dakle $\lim Ax_n = 0$, a odavde prema izboru niza (x_n) slijedi $\lim x_n = 0$ (ovdje je korišteno da je $z \neq 0$, što nije ograničenje, jer za $z = 0$ odmah imamo $z \in \mathbb{R}$) što je nemoguće. Ovim je propozicija dokazana.

Navešćemo sada jedan primjer J-hermitskog operatora koji pokazuje da spektar J-hermitskog operatora može biti prilično proizvoljan. Neka je B proizvoljan zatvoren operator u Hilbertovom prostoru $(H', (\cdot,\cdot)')$. U Hilbertovom prostoru $(H, (\cdot,\cdot)) = H' \dotplus H'$ definišimo skalarni produkt

$$[x,y] = \left(\begin{pmatrix} 0 & I \\ I & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} \right), \quad x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, \ y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix},$$

$x_j, y_j \in H'$, $j=1,2$. Tada je $(H,[\cdot,\cdot])$ Kreinov prostor i lako se vidi da je operator

$$A = \begin{pmatrix} B & 0 \\ 0 & B^* \end{pmatrix}$$

J-hermitski u Kreinovom prostoru $(H,[\cdot,\cdot])$ i $\sigma(A) = \sigma(B) \cup \sigma(B^*)$. Za Kreinov prostor $(H,[\cdot,\cdot])$ definitni skalarni produkt iz definicije 1.1. je skalarni produkt $(\cdot,\cdot)$, a involucija J je

$$J = \begin{pmatrix} 0 & I \\ I & 0 \end{pmatrix}.$$

Za operator $U: H \longrightarrow H$ kažemo da je <u>J-unitaran</u> operator ako vrijedi

$$[Ux,Uy] = [x,y] \qquad (x,y \in H) \qquad (1.30)$$

i $\operatorname{ran}(U) = H$.

TEOREM 1.28. (i) J-unitaran operator U je ograničen.

(ii) Operator $U: H \longrightarrow H$ je J-unitaran ako i samo ako je

$$U^+U = UU^+ = I$$

(iii) Za J-unitaran operator U i proizvoljan potprostor F Kreinovog prostora H vrijedi

$$(U(F))^{\perp} = U(F^{\perp}). \tag{1.31}$$

(iv) Ako je M maksimalan pozitivan (resp. maksimalan uniformno pozitivan, maksimalan zatvoren pozitivno definitan) potprostor onda je i $U(M)$ maksimalan pozitivan (resp. maksimalan uniformno pozitivan, maksimalan zatvoren pozitivno definitan) potprostor.

Dokaz. (i) Prema definiciji J-unitarnog operatora je $\mathrm{dom}(U) = H$. Dokazaćemo da je graf operatora U zatvoren skup, pa je prema teoremu o zatvorenom grafu ([12] teorem 8.2.) operator U ograničen. Neka $x_n \to x_o$, $Ux_n \to y_o$, $x_n, x_o, y_o \in H$, $n=1,2,\ldots$. Tada je

$$[Ux_n, Uy] = [x_n, y] \to [x_o, y] \qquad (n \to \infty) \qquad (y \in H)$$

S druge strane je

$$[Ux_n, Uy] \to [y_o, Uy] \qquad (n \to \infty) \qquad (y \in H)$$

Dakle $$[Ux_o, Uy] = [y_o, Uy] \qquad (y \in H).$$

Pošto je $\mathrm{ran}(U) = H$ odavde slijedi da je $Ux_o = y_o$, pa je graf operatora U zatvoren.

(ii) Neka je U J-unitaran operator. Relacija (1.30) je ekvivalentna sa

$$[U^+Ux, y] = [x, y] \qquad (x, y \in H),$$

tj. sa $U^+U = I$. Odavde je $UU^+U = U$, i pošto je $\mathrm{ran}(U)=H$ imamo da je i $UU^+ = I$. Obrnuto, neka je $U^+U = UU^+ = I$. Tada $U^+U = I$ implicira da vrijedi (1.30), a $UU^+ = I$ implicira da je $\mathrm{ran}(U) = H$.

(iii) Uzimajući u obzir da je $U^{-1} = U^{+}$ jednakost (1.31) je očigledna.

(iv) Pošto J-unitaran operator čuva skalarni produkt $[\cdot\,,\cdot]$ potprostor $U(M)$ je pozitivan (resp. uniformno pozitivan, pozitivno definitan), a kako je U prema (ii) i teoremu 1.19. h) obostrano jednoznačno i obostrano neprekidno preslikavanje $U(M)$ je zatvoren potprostor. Prema korolaru 1.9. potprostor $M^{\perp}$ je negativan potprostor, pa je prema (iii) i potprostor $(U(M))^{\perp}$ negativan potprostor. Sada je (iv) posljedica korolara 1.14. Teorem je dokazan.

KOROLAR 1.29. Ako je maksimalan pozitivan potprostor M invarijantan u odnosu na J-unitaran operator U onda je $UM = M$.

Dokaz. Iz $UM \subseteq M$ slijedi $U^{+}UM \subseteq U^{+}M$, tj. $M \subseteq U^{+}M$. Pošto je i U^{+} J-unitaran operator prema teoremu 1.28. (iv) $U^{+}M$ je maksimalan pozitivan potprostor, pa je $M = U^{+}M$. Odavde je $UM = M$.

Dokažimo sada teorem analogan teoremu 1.20. za J-unitarne operatora.

TEOREM 1.30. Neka je U J-unitaran operator u Kreinovom prostoru H. Tada vrijedi:

(i) spektar $\sigma(U)$ operatora U leži simetrično u odnosu na jediničnu kružnicu C kompleksne ravni, tj. vrijedi $\sigma(U) = (\sigma(U))^{*}$, gdje je za $B \subseteq \mathbb{C}\setminus\{0\}$, $B^{*} := \{1/\bar{z}, z \in B\}$, specijalno $z^{*} = 1/\bar{z}$ za $z \neq 0$.

(ii) iz $z \in \sigma_p(U)$ slijedi $z^{*} \in \sigma_p(U) \cup \sigma_r(U)$,

(iii) iz $z \in \sigma_r(U)$ slijedi $z^{*} \in \sigma_p(U)$.

Dokaz. Neka $z \in \rho(U)$, $z \neq 0$. Tada je

$$z^* I - U = -z^* U(\bar{z} I - U^+)$$

Na osnovu (1.26) odavde vidimo da $z^* \in \rho(U)$. Zbog $0 \notin \sigma(U)$ vrijedi (i).

(ii) Neka $z \in \sigma_p(U)$ i neka je $x \neq 0$ odgovarajući svojstveni vektor. Pretpostavimo da je $\operatorname{ran}(z^* I - U)$ gust u H. Tada postoji vektor $y \in H$ tako da vrijedi

$$[x, (z^* I - U)y] \neq 0 .$$

Odavde je $$[(z^{-1} I - U^+)x, y] \neq 0.$$

Dakle $z^{-1} U^+ (U - zI)x \neq 0$. Ovo je nemoguće prema izboru vektora x. Dakle $z^* \in \sigma_p(U) \cup \sigma_r(U)$.

(iii) Neka je $z \in \sigma_r(U)$. Tada potprostor $\operatorname{ran}(zI - U)$ nije gust u prostoru H, pa postoji $y \in H$, $y \neq 0$ za koje je

$$[(zI - U)x, y] = 0 \qquad (x \in H).$$

Dakle $$[x, (\bar{z} I - U^+)y] = 0 \qquad (x \in H).$$

Odavde je $(\bar{z} I - U^+)y = 0$, pa je i

$$-\bar{z} U^+ (z^* I - U)y = 0$$

Dakle $z^* \in \sigma_p(U)$. Teorem je dokazan.

KOROLAR 1.31. Ako je U J-unitaran operator onda vrijedi:

(i) skup $\sigma_p(U) \cup \sigma_r(U)$ leži simetrično u odnosu na jediničnu kružnicu kompleksne ravni,

(ii) tačke sa jedinične kružnice ne pripadaju skupu $\sigma_r(U)$,

(iii) skup $\sigma_c(U)$ leži simetrično u odnosu na jediničnu kružnicu.

U daljem ćemo sa $\mathcal{F}(B)$, $B \subseteq \mathbb{C} \cup \{\infty\}$, označiti skup svih kompleksnih funkcija koje su analitičke na nekoj okolini (koja zavisi od konkretne funkcije) skupa B. Ako je $B = \sigma_e(T)$, T operator iz H u H, $\sigma_e(T) := \sigma(T)$ za ograničen operator T i $\sigma_e(T) := \sigma(T) \cup \{\infty\}$ za neograničen operator T, stavljamo $\mathcal{F}(T) := \mathcal{F}(\sigma_e(T))$. Posmatraćemo samo zatvorene operatore T, čije područje definicije je gust skup u H i za koje je $\rho(T) \neq \emptyset$. Za ovakav operator T i $f \in \mathcal{F}(T)$ operator $f(T)$ definisan je Riesz-Dunford-ovim funkcionalnim računom, [4] VII.3. str.567 i VII.9. str.599.

Za kompleksnu funkciju f definišemo

$$f^*(z^*) := \overline{f(z)} \qquad (z \in \mathrm{dom}(f))$$

Iz ove definicije je očigledno $\mathrm{dom}(f^*) = (\mathrm{dom}(f))^*$. Takođe se lako provjerava da su područja analitičnosti funkcija f i f^* simetrična u odnosu na jediničnu kružnicu. Pošto je prema teoremu 1.30. za J-unitaran operator U $\sigma(U) = (\sigma(U))^*$ funkcija $f^* \in \mathcal{F}(U)$ čim $f \in \mathcal{F}(U)$. Vrijedi sljedeća propozicija.

PROPOZICIJA 1.32. Neka je U J-unitaran operator na Kreinovom prostoru H i neka je $f \in \mathcal{F}(U)$. Tada je

$$f(U)^+ = f^*(U) \qquad (1.32)$$

Dokaz. Po definiciji je, za $g \in \mathcal{F}(U)$

$$g(U) = (2\pi i)^{-1} \int_{\Gamma} g(z)\, R(z,U)\, dz$$

gdje je $R(z,U) := (zI - U)^{-1}$, kriva Γ je pozitivno orijentisana kriva koja je granica Cauchyjevog područja ([12] 9.6. str.478) Ω čije je zatvorenje sadržano u području analitičnosti funkcije g i $\Omega \supseteq \sigma(U)$. Sada imamo da za $x, y \in H$ vrijedi

$$[f(U)x,\ y] = [\,f(U)\ U^{-1}x,\ U^{-1}y\,] =$$

$$= (2\pi i)^{-1} \int_{\Gamma} z^{-1} f(z) \left[R(z,U)x,\ U^{-1}y\right] dz =$$

$$= (2\pi i)^{-1} \int_{\Gamma} z^{-1} f(z)\ \overline{\left[R(\bar{z},U^{+})\ U^{-1}y,\ x\right]}\ dz =$$

$$= (2\pi i)^{-1} \int_{\Gamma} z^{-1} f(z)\ \overline{(-z^{*})}\ \overline{\left[R(z^{*},U)y,\ x\right]}\ dz =$$

$$= (2\pi i)^{-1} \int_{\Gamma} \overline{f^{*}(z^{*})}\ \overline{(-(z^{*})^{2})}\ \overline{\left[R(z^{*},U)y,\ x\right]}\ dz =$$

$$= (2\pi i)^{-1} \left(\int_{\Gamma} f^{*}(z^{*}) \left[R(z^{*},U)y,\ x\right] (-(z^{*})^{2})\ d\bar{z}\right)^{-} =$$

$$= \left(-(2\pi i)^{-1} \int_{\Gamma^{*}} f^{*}(z) \left[R(z,U)y,\ x\right] dz\right)^{-} =$$

$$= \overline{\left[f^{*}(U)y,\ x\right]} = \left[x,\ f^{*}(U)y\right]$$

Dakle $$[f(U)x,y] = [x,f^{*}(U)y] \qquad (x,y \in H)$$

Odavde je očigledno da je $f(U)^{+} = f^{*}(U)$ i dokaz je završen.

KOROLAR 1.33. Neka je U J-unitaran operator i neka funkcija $f \in \mathcal{F}(U)$ uzima realne vrijednosti na jediničnoj kružnici (u onim tačkama u kojima je definisana). Tada je operator $f(U)$ J-hermitski.

Dokaz. Neka je Ω Cauchyjevo područje koje sadrži spektar $\sigma(U)$ i zatvorenje $Cl(\Omega)$ je sadržano u području analitičnosti funkcije f. Prema pretpostavci funkcija f je realna na $C \cap Cl(\Omega)$, C jedinična kružnica kompleksne ravni, pa je prema Schwarzovom principu refleksije ([2o] str.238)

$$f^{*}(z) = f(z) \qquad (z \in Cl\Omega)$$

Odavde zaključujemo da vrijedi $f^{*}(U) = f(U)$, što zajedno sa (1.32) daje $f(U) = f(U)^{+}$. Time je korolar dokazan.

TEOREM 1.34. Neka je U J-unitaran operator na Kreinovom prostoru H i σ spektralni skup operatora U (podskup skupa $\sigma(U)$ koji je i otvoren i zatvoren u relativnoj topologiji na $\sigma(U)$). Tada je i σ^{*} spektralni skup operatora U, operator $E(\sigma)$*) ([4] VII.3.17.str573) ima ograničen J-adjungovan operator $E(\sigma)^{+}$ i vrijedi

$$E(\sigma)^{+} = E(\sigma^{*}).$$

Spektralni skup σ je simetričan u odnosu na jediničnu kružnicu ($\sigma = \sigma^{*}$) ako i samo ako je u njemu odgovarajuća projekcija $E(\sigma)$ J-hermitski operator. Spektralni skup σ je antisimetričan ($\sigma \cap \sigma^{*} = \emptyset$) ako i samo ako je $E(\sigma)^{+}E(\sigma) = 0$ i tada se indefinitni skalarni produkt poništava na potprostoru $E(\sigma)H$.

Dokaz. Iz teorema 1.3o. (i) slijedi da je simetrija $z \mapsto z^{*}$ $(z \in \sigma(U))$ obostrano jednoznačno i obos-

---

*) Operator $E(\sigma)$ naziva se spektralni projektor koji odgovara spektralnom skupu σ. Ovaj operator zavisi od operatora U i kada želimo posebno istaći ovu zavisnost označavamo ga sa $E(\sigma,U)$.

trano neprekidno preslikavanje na $\sigma(U)$. Dakle i σ^* je spektralni skup. Za spektralni skup σ postoji funkcija $f_\sigma \in \mathcal{F}(U)$ koja je jednaka jedan na σ i poništava se na ostatku spektra $\sigma(U)$. Očigledno je da vrijedi

$$(f_\sigma)^* = f_{\sigma^*} \tag{1.33}$$

Prema definiciji je $E(\sigma) = f_\sigma(U)$ pa (1.32) i (1.33) daju

$$E(\sigma)^+ = E(\sigma^*) \tag{1.34}$$

Iz jednakosti (1.34) slijedi da $\sigma = \sigma^*$ povlači $E(\sigma)=E(\sigma)^+$. Obrnuto, ako je $E(\sigma) = E(\sigma)^+$ iz (1.34) slijedi $E(\sigma) = E(\sigma^*)$, a odavde $\sigma = \sigma^*$ ([4] VII.3.21.str.575). Na osnovu (1.34) vrijedi

$$E(\sigma)^+E(\sigma) = E(\sigma^*)E(\sigma) = E(\sigma \cap \sigma^*)$$

Odavde je očigledno da je $\sigma \cap \sigma^* = \emptyset$ ako i samo ako je $E(\sigma)^+E(\sigma^*) = 0$. Ovim je teorem dokazan.

Za J-hermitske operatore vrijedi teorem analogan teoremu 1.34. On se može dokazati analogno (vrijedi analogon propozicije 1.32.), a i pomoću Cayleyjeve transformacije koju ćemo dokazati na kraju ovog dijela rada.

TEOREM 1.34' Neka je A J-hermitski operator i σ ograničen spektralni skup operatora A. Tada je i $\bar{\sigma}$ ograničen spektralni skup operatora A. Operator $E(\sigma)$ ima ograničen J-adjungovan operator $E(\sigma)^+$ definisan na prostoru H i vrijedi

$$E(\sigma)^+ = E(\bar{\sigma}).$$

Ograničen spektralni skup σ je simetričan u odnosu na realnu osu ($\sigma = \overline{\sigma}$) ako i samo ako je operator $E(\sigma)$ J-hermitski. σ je antisimetričan u odnosu na realnu osu ($\sigma \cap \overline{\sigma} = \emptyset$) ako i samo ako vrijedi $E(\sigma)^+E(\sigma) = 0$, tj. kada se skalarni produkt $[\cdot\,,\cdot]$ poništava na potprostoru $E(\sigma)H$.

Cayle‿jeva transformacija

TEOREM 1.35. Neka je A J-hermitski operator u Kreinovom prostoru H i neka su ε i z kompleksni brojevi, $|\varepsilon| = 1$, $\bar{z} \neq z$, $z \in \rho(A)$. Tada je operator U definisan sa

$$U = \varepsilon(A - \bar{z}I)(A - zI)^{-1} = \varepsilon(I + (z - \bar{z})(A - zI)^{-1}) \qquad (1.35)$$

J-unitaran operator i $\varepsilon \notin \sigma_p(U)$.

Dokaz. Prema teoremu 1.2o. zajedno sa $z \in \rho(A)$ vrijedi i $\bar{z} \in \rho(A)$. Kao J-hermitski operator A je zatvoren operator, pa je $\operatorname{ran}(A - \bar{z}I) = H$ i $\operatorname{dom}((A - zI)^{-1}) = H$ ([12] propozicija 8.9.). Dakle operator U je obostrano jednoznačno preslikavanje sa H na H. Za x,y iz H stavimo

$$x = (A - zI)x', \; y = (A - zI)y', \; x',y' \in \operatorname{dom}(A).$$

Tada je

$$[Ux,Uy] = [(A - \bar{z}I)x',(A - \bar{z}I)y'] =$$
$$= [Ax',Ay'] - \bar{z}\,[x',Ay'] - z\,[Ax',y'] + |z|^2\,[x',y']$$

i

$$[x,y] = [(A - zI)x',(A - zI)y'] =$$
$$= [Ax',Ay'] - \bar{z}[Ax',y'] - z[x',Ay'] + |z|^2[x',y'].$$

Dakle $[Ux,Uy] = [x,y]$, x,y iz H i $\mathrm{ran}(U) = H$, pa je U J-unitaran operator. Iz definicije operatora U je očigledno da $\varepsilon \notin \sigma_p(U)$ jer je $\varepsilon(z - \bar{z})(A - zI)^{-1}$ obostrano jednoznačno preslikavanje. Teorem je dokazan.

TEOREM 1.36. Neka je U J-unitaran operator, na Kreinovom prostoru H i neka su ε, z kompleksni brojevi takvi da je $|\varepsilon| = 1$, $\bar{z} \neq z$, $\varepsilon \notin \sigma_p(U)$. Tada je operator A definisan sa

$$A=(zU - \varepsilon\bar{z}I)(U - \varepsilon I)^{-1} = zI + \varepsilon(z - \bar{z})(U - \varepsilon I)^{-1} \qquad (1.36)$$

J-hermitski operator i $z \in \rho(A)$.

Dokaz. Operator A je kao suma ograničenog i zatvorenog operatora zatvoren operator. Prema korolaru 1.31. $\varepsilon \notin \sigma_r(U)$, pa zbog $\varepsilon \notin \sigma_p(U)$ imamo da je $\mathrm{Cl}(\mathrm{ran}(U-\varepsilon I))=H$. Pošto je $\mathrm{dom}(A) = \mathrm{ran}(U - \varepsilon I)$ operator A je definisan na gustom podskupu prostora H. Neka su $x,y \in \mathrm{dom}(A)$ i

$$x = (U - \varepsilon I)x', \quad y = (U - \varepsilon I)y', \quad x',y' \in H.$$

Tada je

$$[Ax,y] = [(zU - \varepsilon\bar{z}I)x',(U - \varepsilon I)y'] =$$
$$= z[Ux',Uy'] - z\bar{\varepsilon}[Ux',y'] - \varepsilon\bar{z}[x',Uy'] + |\varepsilon|^2\bar{z}[x',y']$$

i

$$[x,Ay] = [(U - \varepsilon I)y',(zU - \varepsilon\bar{z}I)y'] =$$
$$= \bar{z}[Ux',Uy'] - \bar{\varepsilon}z[Ux',y'] - \varepsilon\bar{z}[x',Uy'] + |\varepsilon|^2 z[x',y'].$$

Uzimajući u obzir da je U J-unitaran operator i da je $|\varepsilon| = 1$ odavde je

$$[Ax,y] = [x,Ay] \qquad (x,y \in \mathrm{dom}(A))$$

Ovim je dokazano da je $A \subseteq A^+$. Neka je sada $x \in \mathrm{dom}(A^+)$ i stavimo $x^+ = A^+x$. Imamo da je

$$[Ay,x] = [y,x^+] \qquad (y \in \mathrm{dom}(A)),$$

a ovo možemo pisati

$$[(zU - \varepsilon\bar{z}I)y',x] = [(U - \varepsilon I)y',x^+] \qquad (y' \in H).$$

Koristeći J-unitarnost operatora U odavde dobijamo da je

$$[Uy',\bar{z}x - \bar{\varepsilon}zUx - x^+ + \bar{\varepsilon}Ux^+] = 0 \qquad (y' \in H),$$

i odavde zbog $\mathrm{ran}(U) = H$

$$\bar{z}x = \bar{\varepsilon}zUx - \bar{\varepsilon}Ux^+ + x^+.$$

Dalje, množenjem posljednje jednakosti sa ε i oduzimanjem εzx, dobijamo

$$\varepsilon(\bar{z}x - zx) = zUx - Ux^+ + \varepsilon x^+ - \varepsilon zx$$
$$\varepsilon(\bar{z} - z)x = (U - \varepsilon I)(zx - x^+)$$

Dakle

$$x = (1/\varepsilon(z - \bar{z}))(U - \varepsilon I)(zx - x^+),$$

pa $x \in \mathrm{ran}(U - \varepsilon I) = \mathrm{dom}(A)$, i zbog već dokazane relacije $A \subseteq A^+$ imamo da je A J-hermitski operator.

Iz jednakosti. (1.36) dobijamo da je

$$(A - zI)(U - \varepsilon I) = \varepsilon(z - \bar{z})I.$$

Kako je J-unitaran operator U ograničen (teorem 1.28.(i)) odavde je očigledno da $z \in \rho(A)$. Time je teorem dokazan.

Ako su J-unitaran operator U i J-hermitski operator A povezani jednakostima (1.35) ili (1.36) onda kažemo da je jedan Cayle-jeva transformacija drugog. Očigledno je da su jednakosti (1.35) i (1.36) jedna drugoj inverzne, tj. ako je operator U definisan sa (1.35) onda uvrštavajući operator U u (1.36) dobijamo polazni operator A, i obrnuto ako je operator A definisan sa (1.36) uvrštavajući ga u (1.35) dobijamo polazni operator U.

Neka je J-unitaran operator U Cayle-jeva transformacija J-hermitskog operatora A. Definišimo preslikavanje

$$\Phi : \lambda \longmapsto \varepsilon \frac{\lambda - \bar{z}}{\lambda - z} = \zeta \qquad (\lambda \in \mathbb{C},\ \lambda \neq z), \qquad (1.37)$$

gdje su ε i z brojevi iz teoreme 1.35. Preslikavanje je obostrano jednoznačno preslikavanje sa $\mathbb{C} \setminus \{z\}$ na $\mathbb{C} \setminus \{\varepsilon\}$. Sada vrijedi

$$(\zeta I - U)(A - zI) = \frac{\varepsilon(z - \bar{z})}{\lambda - z}(A - \lambda I) \quad (\lambda \in \mathbb{C},\ \lambda \neq z) \quad (1.38)$$

Pošto je $z \in \rho(A)$ odavde se vidi da je
$\lambda \in \sigma_p(A)$ ako i samo ako je $\zeta \in \sigma_p(U)$, tj. $\Phi(\sigma_p(A)) = \sigma_p(U)$
$\lambda \in \sigma_r(A)$ ako i samo ako je $\zeta \in \sigma_r(U)$, tj. $\Phi(\sigma_r(A)) = \sigma_r(U)$
$\lambda \in \sigma_c(A)$ ako i samo ako je $\zeta \in \sigma_c(U) \setminus \{\varepsilon\}$, tj.
tj. $\Phi(\sigma_c(A)) = \sigma_c(U) \setminus \{\varepsilon\}$.

Iz jednakosti (1.36) vidi se da je operator A neograničen ako $\varepsilon \in \sigma_c(U)$, obrnuto se vidi iz druge jednakosti u (1.35), pa je operator A neograničen ako i samo ako je $\varepsilon \in \sigma_c(U)$. Definišimo sada preslikavanje Φ na $\mathbb{C} \cup \{\infty\}$ stavljajući $\Phi(z) = \infty$ i $\Phi(\infty) = \varepsilon$, pa imamo da je $\Phi(\sigma_e(A)) = \sigma(U)$. Dakle vrijedi i

$$\Phi(\rho(A)) = \rho(U) \cup \{\infty\} .$$

Za $\zeta \in \rho(U)$ imamo da vrijedi, prema (1.38),

$$R(\zeta;U) = -\frac{\lambda - z}{\varepsilon 2i\operatorname{Im}(z)}(A - zI)R(\lambda;A) =$$

$$= -\frac{\lambda - z}{\varepsilon 2i\operatorname{Im}(z)}(I + (\lambda - z)R(\lambda;A))$$

U dokazu teorema 1.36. vidjeli smo da je

$$R(z;A) = -\frac{1}{\varepsilon 2i\operatorname{Im}(z)}(U - \varepsilon I),$$

a iz pretposljednje jednakosti za $\lambda \neq z$ dobijamo:

$$R(\lambda;A) = -\frac{\zeta - \varepsilon}{2i\operatorname{Im}(z)}(U - \varepsilon I)R(\zeta;U) =$$

$$= -\frac{\zeta - \varepsilon}{2i\operatorname{Im}(z)}(I + (\zeta - \varepsilon)R(\zeta;U))$$

Definišimo sada pojam Rieszovog indeksa koji će u daljem igrati važnu ulogu.

Neka je T operator iz Banachovog prostora X u X. Rieszov indeks kompleksnog broja z u odnosu na operator T je najmanji nenegativan cio broj n za koji je $(zI - T)^n x = 0$ za svaki vektor x za koji je $(zI - T)^{n+1}x = 0$.

Dakle Rieszov indeks broja z u odnosu na operator T je najmanji nenegativan cio broj za koji vrijedi

$$\ker((zI - T)^{n+1}) = \ker((zI - T)^n).$$

U slučaju da ova jednakost ne vrijedi ni za jedan broj $n=0,1,\ldots$ smatramo da je Rieszov indeks broja z u odnosu na operator T beskonačan.

Iz ove definicije je očigledno da je Rieszov indeks broja z u odnosu na operator T veći od nule ako i samo ako je $z \in \sigma_p(T)$.

PROPOZICIJA 1.37. Rieszov indeks kompleksnog broja λ, $\lambda \neq z$, u odnosu na operator A jednak je Rieszovom indeksu broja $\Phi(\lambda) = \zeta$ u odnosu na operator U, pri čemu su operatori A i U i kompleksan broj z iz teorema 1.35.

Dokaz. Množeći jednakost (1.38) sa ograničenim operatorom $(A - zI)^{-1}$ dobijamo da je

$$(\zeta I - U) = \frac{\varepsilon(z - \bar{z})}{\lambda - z}(A - \lambda I)(A - zI)^{-1} \qquad (\lambda \in \mathbb{C},\ \lambda \neq z)$$

Očigledno je da operatori $A - \lambda I$ i $(A - zI)^{-1}$ komutiraju na potprostoru $\mathrm{dom}(A)$. Pošto je $\mathrm{ran}((A - zI)^{-1}) = \mathrm{dom}(A)$ odavde slijedi da je

$$(\zeta I - U)^n = \left(\frac{\varepsilon(z-\bar{z})}{\lambda - z}\right)^n (A-\lambda I)^n (A-zI)^{-n} \qquad (n=1,2,\ldots). \quad (1.39)$$

Zbog očigledne jednakosti $\mathrm{ran}((A - zI)^{-n}) = \mathrm{dom}(A^n)$ odavde je

$$(A - zI)^{-n}(\ker((\zeta I - U)^n)) = \ker((A - \lambda I)^n) \qquad (n=1,2,\ldots),$$

pa pošto je operator $(A - zI)^{-n}$ injektivno preslikavanje sa H na $\mathrm{ran}(A^n)$ iz posljednje jednakosti lako dobijamo jednakost Rieszovih indeksa broja λ u odnosu na operator A i broja $\zeta = \Phi(\lambda)$ u odnosu na operator U. Time je propozicija dokazana.

Na osnovu jednakosti (1.39) je jasno da korijeni potprostor operatora A koji odgovara svojstvenoj vrijednosti λ podudara sa korijenim potprostorom operatora U koji odgovara svojstvenoj vrijednosti $\Phi(\lambda) = \zeta$.

Sada ćemo dokazati jedan teorem koji je važan za dalja razmatranja i koji daje vezu između reda pola rezolvente i Rieszovog indeksa izolovanih tačaka spektra.

TEOREM 1.38. Neka je T ograničen operator na Banachovom prostoru X i z pol reda ν rezolvente operatora T. Tada je Rieszov indeks broja z u odnosu na operator T jednak ν. Pored toga izolovana tačka z spektra operatora T je pol reda ν rezolvente operatora T ako i samo ako je

$$(zI - T)^{\nu} E(\{z\},T) = 0, \qquad (zI - T)^{\nu-1}E(\{z\},T) \neq 0.$$

Dokaz. Laurentov razvoj rezolvente operatora T u okolini $\{w \in \mathbb{C} : 0 < |w - z| < \delta\}$ izolovane tačke z spektra $\sigma(T)$ dat je sa

$$R(w;T) = \sum_{-\infty}^{\infty} A_n(z - w)^n$$

gdje je

$$A_{-(m+1)} = -(zI - T)^m E(\{z\},T) \qquad (m=0,1,2,\dots)$$

Dakle tačka z je pol reda ν ako i samo ako je

$$(zI - T)^{\nu} E(\{z\},T) = 0, \qquad (zI - T)^{\nu-1}E(\{z\},T) \neq 0.$$

Dokažimo i prvu tvrdnju teorema. Neka je tačka z pol reda ν rezolvente operatora T. Tada postoji vektor x_0 iz X za koji je

$$(zI - T)^{\nu} x_0 = 0, \qquad (zI - T)^{\nu-1} x_0 \neq 0.$$

Odavde vidimo da Rieszov indeks broja z u odnosu na operator T nije manji od ν. Neka je n Rieszov indeks broja z. Tada postoji vektor x iz X za koji je

$$(zI - T)^{n} x = 0, \qquad (zI - T)^{n-1} x \neq 0.$$

Vrijedi

$$R(w;T) = -\sum_{j=0}^{\infty} \frac{(zI-T)^j}{(z-w)^{j+1}}, \qquad |z - w| > \| zI - T \|,$$

[12] korolar 8.14. Za izabrani vektor x dakle vrijedi

$$R(w;T)x = -\sum_{j=0}^{n-1} \frac{(zI - T)^j x}{(z-w)^{j+1}}.$$

Desna strana posljednje jednakosti je analitička funkcija na cijeloj kompleksnoj ravni, osim eventualno u tački z, množenjem obje strane posljednje jednakosti sa $wI - T = (w - z)I + (zI - T)$ dobijamo da posljednja jednakost važi za sve w iz $\rho(T)$. Ako je Γ granica Cauchyjevog područja koje sadrži spektar $\sigma(T)$ i Γ_z mala kružnica oko tačke z imamo da je

$$x = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} R(w;T)x\,dw = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_z} R(w;T)x\,dw = E(z,T)x$$

Pošto je funkcija $w \longmapsto (zI - T)^{\nu} R(w;T)$ analitička u okolini tačke z odavde imamo da je

$$(zI - T)^{\nu} x = (zI - T)^{\nu} E(\{z\},T)x = 0,$$

i ovim je dokazano da je $n \leqslant \nu$ i time je dokaz teorema završen.

Na osnovu ovog teorema lako se dokazuje sljedeća:

PROPOZICIJA 1.39. Neka je U J-unitaran operator na Kreinovom prostoru H i z izolovana tačka spektra operatora U. Tada tačke z i z^* imaju jednake Rieszove indekse u odnosu na operator U.

Dokaz. Prema teoremu 1.30. i tačka z^* je izolovana tačka spektra operatora U. Uporedujući Laurentove razvoje rezolvente operatora U u okolini izolovanih tačaka z i z^* spektra $\sigma(U)$ i koristeći činjenicu da je $(zI - U)^m E(\{z\},U) = 0$, prema teoremu 1.19. i teoremu 1.34., ekvivalentno sa

$$0 = (\bar{z}I - U^+)^m E(\{z^*\},U) = (-\bar{z}U^+)^m (z^*I - U)^m E(\{z^*\},U)$$

dobivamo da su redovi polova z i z^* rezolvente operatora U jednaki. Teorem 1.38. sada povlači da su i Rieszovi indeksi tačaka z i z^* jednaki. Ovim je propozicija dokazana.

Napomenimo da iz ove propozicije slijedi da je skup izolovanih tačaka spektra J-unitarnog operatora U koje pripadaju tačkastom spektru $(\sigma_p(U))$ simetričan u odnosu na jediničnu kružnicu C.

PROPOZICIJA 1.39'. Neka je A J-hermitski operator i λ izolovana tačka spektra operatora A. Tada tačke λ i $\bar{\lambda}$ imaju jednake Rieszove indekse u odnosu na operator A.

Dokaz. Preslikavanje Φ iz (1.37) je obostrano jednoznačno i obostrano neprekidno preslikavanje sa $\mathbb{C}\setminus\{z\}$ na $\mathbb{C}\setminus\{\varepsilon\}$, $z \in \rho(A)$, $z \neq \bar{z}$, pa je $\Phi(\lambda)$ izolovana tačka spektra J-unitarnog operatora U datog sa (1.35). Lako se vidi da vrijedi $(\Phi(\lambda))^* = \Phi(\bar{\lambda})$, pa prema propoziciji 1.39. kompleksni brojevi $\Phi(\lambda)$ i $\Phi(\bar{\lambda})$ imaju jednake Rieszove indekse u odnosu na operator U. Propozicija 1.37. sada implicira da i brojevi λ i $\bar{\lambda}$ imaju jednake Rieszove indekse u odnosu na operator A. Propozicija je dokazana.

II. J-SPEKTRALNE FUNKCIJE

Pošto ćemo se u sljedeća dva dijela ovog rada ograničiti na proučavanje operatora koji imaju spektar na jediničnoj kružnici C kompleksne ravni $\mathbb{C}$, odnosno na realnoj pravoj $\mathbb{R}$, uvedimo neke zajedničke pojmove za ova dva prostora. Umjesto realne prave $\mathbb{R}$ posmatraćemo njenu kompaktifikaciju jednom tačkom $\overline{\mathbb{R}}$ sa uobičajenom topologijom. Jediničnu kružnicu C smatramo takođe snabdjevenom uobičajenom topologijom. Prostori C i $\overline{\mathbb{R}}$ su izomorfni. U ovom dijelu ćemo sa S označavati prostor koji može biti ili C ili $\overline{\mathbb{R}}$. Pod intervalom u S podrazumijevamo svaki povezan podskup skupa S. (Kada bude riječ samo o skupu C upotrebljavaće se prirodniji izraz luk.)

Neka je $c = \{s_1, \ldots, s_n\}$ konačan podskup skupa S. Označimo sa $\mathcal{A}(S \setminus c)$ algebru podskupova skupa S generisanu svim intervalima iz S čije krajnje tačke ne pripadaju skupu c.

DEFINICIJA 2.1. Neka je E preslikavanje algebre $\mathcal{A}(S \setminus c)$ u algebru J-ortogonalnih projekcija na Kreinovom prostoru H. Pod <u>nosačem preslikavanja E, supp(E)</u>, podrazumijevamo zatvorenje komplementa unije svih skupova $\Delta \in \mathcal{A}(S \setminus c)$ za koje je $E(\Delta) = 0$. Za tačku $s \in \mathrm{supp}(E)$ kažemo da je <u>pozitivnog</u> (resp. <u>negativnog</u>) <u>tipa</u> ako postoji skup $\Delta \in \mathcal{A}(S \setminus c)$, $s \in \mathrm{Int}(\Delta)$ za koji vrijedi $E(\Delta)H$ je pozitivan (resp. negativan) potprostor. Skup svih tačaka pozitivnog (resp. negativnog) tipa označavaćemo sa $\mathrm{supp}_+(E)$ (resp. $\mathrm{supp}_-(E)$). Za tačke iz unije $\mathrm{supp}_+(E) \cup \mathrm{supp}_-(E)$ kažemo da su <u>definitnog tipa</u>.

DEFINICIJA 2.2. Preslikavanje E sa algebre skupova $\mathcal{A}(S\setminus c)$ u skup J-hermitskih operatora na Kreinovom prostoru H nazivamo <u>J-spektralna funkcija</u> u Kreinovom prostoru H sa skupom kritičnih tačaka $c =: c(E)$ ako su ispunjeni uslovi:

1) za $\Delta_j \in \mathcal{A}(S\setminus c)$, $j=1,2,3$, $\Delta_2 \cap \Delta_3 = \emptyset$

vrijedi $\quad E(\Delta_1 \cap \Delta_2) = E(\Delta_1)\, E(\Delta_2)$,

$\quad E(\Delta_2 \cup \Delta_3) = E(\Delta_2) + E(\Delta_3)$,

takođe $\quad E(\emptyset) = 0$ i $E(S) = I$,

2) za $\Delta \in \mathcal{A}(S\setminus c)$, $\Delta \cap c \neq \emptyset$ potprostor $E(\Delta)H$ sadrži i pozitivne i negativne vektore,

3) svaka tačka iz $\text{supp}(E)\setminus c$ je definitnog tipa,

4) za $\Delta_0 \in \mathcal{A}(S\setminus c)$ i za po parovima disjunktne skupove $\Delta_j \subseteq \Delta_0$, $\Delta_j \in \mathcal{A}(S\setminus c)$, $j=1,2,\ldots$ za koje vrijedi $\Delta_0 = \bigcup_j \Delta_j$ ispunjeno je $E(\Delta_0) = \sum_j E(\Delta_j)$, pri čemu se suma na desnoj strani uzima u smislu jake konvergencije operatora.

U definiciji nosača za J-spektralnu funkciju E mogli smo umjesto skupova $\Delta \in \mathcal{A}(S\setminus c)$ uzeti intervale iz $\mathcal{A}(S\setminus c)$ jer očigledno prema uslovu 1) vrijedi

$$\bigcup \{\Delta \in \mathcal{A}(S\setminus c) : E(\Delta) = 0\} =$$
$$= \bigcup \{\Delta ;\ \Delta \text{ interval iz } \mathcal{A}(S\setminus c),\ E(\Delta) = 0\} = B$$

U skupu B uvedimo relaciju ekvivalencije: $s', s'' \in B$, $s' \sim s''$ akko postoji interval Δ koji sadrži s' i s'' i $E(\Delta) = 0$. Particija skupa B u odnosu na ovu relaciju ekvivalencije sastoji se od međusobno disjunktnih intervala Δ_n, $n=1,2,\ldots$ i za svaki od ovih intervala vrijedi $E(\Delta_n) = 0$ (koristi se 4)). Neka je sada Δ podinterval skupa B. Tada je $\Delta = \bigcup_n (\Delta \cap \Delta_n)$ pa uslov 4) povlači da je $E(\Delta) = 0$. Pošto je $S\setminus \text{supp}(E) = \text{Int}(B)$

jasno je da za svaku tačku iz ovog skupa postoji okolina $\Delta \in \mathcal{A}(S\setminus c)$ takva da je $E(\Delta) = 0$. Zbog uslova 2) je $c(E) \subseteq \mathrm{supp}(E)$, a prema 3) je

$$\mathrm{supp}(E) = \mathrm{supp}_+(E) \cup \mathrm{supp}_-(E) \cup c(E).$$

Prema teoremu 1.16. i propoziciji 1.22. je $(E(\Delta)H,[\cdot,\cdot]),\Delta\in\mathcal{A}(S\setminus c)$ Kreinov prostor. Prema korolaru 1.17. ako je $E(\Delta)H$ pozitivan (resp. negativan) potprostor onda je $(E(\Delta)H,[\cdot,\cdot])$ (resp. $(E(\Delta)H,-[\cdot,\cdot])$) Hilbertov prostor. Ovo se na primjer dešava u slučaju da vrijedi $\Delta \cap \mathrm{supp}(E) \subseteq \mathrm{supp}_+(E)$ (resp. $\Delta\cap\mathrm{supp}(E)\subseteq\mathrm{supp}_-(E)$). Stvarno, vrijedi $\mathrm{Cl}(\Delta)\cap c(E) = \emptyset$, pa je $\mathrm{Cl}(\Delta)\cap\mathrm{supp}(E)\subseteq \subseteq \mathrm{supp}_+(E)$ (resp. $\mathrm{Cl}(\Delta)\cap\mathrm{supp}(E)\subseteq\mathrm{supp}_-(E)$). Navedena tvrdnja sada slijedi iz činjenice da je $\mathrm{Cl}(\Delta)$ kompaktan podskup skupa S i leme 1.23.

DEFINICIJA 2.3. Za kritičnu tačku α J-spektralne funkcije E kažemo da je <u>prosta</u> ako postoji okolina $\mathcal{O}$ tačke α (u S) sa osobinom da je $\mathcal{O}\cap c(E) = \{\alpha\}$ i da ni jedan povezan podskup skupa $\mathcal{O}\setminus\{\alpha\}$ ne sadrži tačke i pozitivnog i negativnog tipa. Ako se skup $c(E)$ sastoji samo od prostih kritičnih tačaka za J-spektralnu funkciju E kažemo da je <u>prosta.</u> Za kritičnu tačku $\alpha\in c(E)$ kažemo da je <u>regularna</u> ako za niz skupova (Δ_n) sa osobinama $\Delta_n\in\mathcal{A}(S\setminus c(E))$, $\Delta_n\cap c(E)=\{\alpha\}$, $\Delta_n\supseteq\Delta_{n+1}$, $n=1,2,\ldots$ postoji $\lim E(\Delta_n)$ u jakoj konvergenciji operatora. Kritične tačke koje nisu regularne nazivamo <u>singularnim</u> kritičnim tačkama.

Neka je sada α kritična tačka J-spektralne funkcije E. Izaberimo otvoren skup $\Delta\in\mathcal{A}(S\setminus c(E))$ za koji je $\Delta\cap c(E) = \{\alpha\}$. Tada vrijedi

$$H = E(\Delta)H \dotplus E(S\setminus\Delta)H \tag{2.1}$$

Pri tome su $H_1 = E(\Delta)H$ i $H_2 = E(S\setminus\Delta)H$ Kreinovi prostori. J-spektralne funkcije E_i sa vrijednostima u $L(H_i)$ koje inducira J-spektralna funkcija E definisane su sa:

$$E_i(\Delta') = E(\Delta')|H_i = E(\Delta'\cap\Delta_i)|H_i \ , \ \Delta'\in\mathcal{A}(S\setminus c(E))$$

pri čemu je $i=1,2$ i $\Delta_1 = \Delta$, $\Delta_2 = S\setminus\Delta$. Očigledno je da vrijedi

$$\mathrm{supp}(E) = \mathrm{supp}(E_1)\cup\mathrm{supp}(E_2)$$

pri čemu je $\mathrm{supp}(E_i)\subseteq\Delta_i$ $(i=1,2)$, i takođe

$$c(E) = c(E_1)\cup c(E_2).$$

Dakle J-spektralna funkcija E_1 ima samo jednu kritičnu tačku α, pa pri ispitivanju J-spektralne funkcije E u okolini kritične tačke α možemo pretpostaviti da je $c(E) = \{\alpha\}$.

LEMA 2.1. Neka je E J-spektralna funkcija sa jedinom kritičnom tačkom α. Tada postoje otvoreni međusobno disjunktni skupovi $\mathcal{O}^+$ i $\mathcal{O}^-$ takvi da njihova unija prekriva skup $\mathrm{supp}(E)\setminus\{\alpha\}$ i vrijedi $\mathcal{O}^\pm\cap\mathrm{supp}(E) = \mathrm{supp}_\pm(E)$. Pored toga izvan svake okoline tačke α leži samo konačno mnogo komponenata povezanosti skupa $\mathcal{O}^+\cup\mathcal{O}^-$.

Dokaz. Skupovi $supp_+(E)$ i $sup_-(E)$ su disjunktni i relativno zatvoreni u $S\setminus\{\alpha\}$. Definišimo funkciju f na $S\setminus\{\alpha\}$ tako da bude jednaka 1 na $supp_+(E)$, -1 na $supp_-(E)$ i neprekidno produžena na $S\setminus supp(E)$ ali tako da ima najmanji mogući broj nula. Stavimo $\theta^+ = f^{-1}((1/2,1])$ i $\theta^- = f^{-1}([-1,-1/2))$. Očigledno da ovako definisani skupovi θ^+ i θ^- zadovoljavaju tvrdnju leme, s tim da posljednja tvrdnja slijedi iz činjenice da je α jedina tačka nagomilavanja nula funkcije f, naravno ako ovih nula ima beskonačno mnogo. Naime u svakoj okolini tačke nagomilavanja nula funkcije f ima tačaka i pozitivnog i negativnog tipa, pa ta tačka nagomilavanja mora pripadati skupu $c(E)$. Time je lema dokazana.

Neka je α kritična tačka J-spektralne funkcije E. Tada definišemo:

$$W_\alpha = \bigcap\{E(\Delta)H: \Delta\in\mathcal{A}(S\setminus c(E)), \alpha\in\Delta\} =$$
$$=\{x\in H:\ E(\Delta)x=0 \ \text{ za sve } \Delta\in\mathcal{A}(S\setminus c(E)), \alpha\notin\Delta\}$$

Ako je α i jedina kritična tačka J-spektralne funkcije E definišemo i:

$$W_\alpha^\pm = \text{c.l.s}\{E(\Delta_n)H: \Delta_n \text{ su svi intervali koji obrazuju } \theta^\pm\}$$

Naravno $\theta^\pm$ su iz leme 2.1. Lako slijedi da su potprostori W_α, W_α^+, W_α^- međusobno J-ortogonalni i invarijantni u odnosu na svaki operator $E(\Delta)$, $\Delta\in\mathcal{A}(S\setminus c(E))$. Za svako $\Delta\in\mathcal{A}(S\setminus c(E))$, $\Delta\subseteq\theta^\pm$ vrijedi $\Delta\cap supp(E)\subseteq supp_\pm(E)$, pa je $E(\Delta)H$ pozitivan ili negativan potprostor. Na osnovu leme 1.23. sada slijedi da je i potprostor W_α^+ (resp. W_α^-) pozitivan (resp. negativan). Dokažimo sada da vrijedi leme dokazujemo prelazeći na niz $(I - P_n)$ koji ispunjava uslove već dokazane tvrdnje. Sada tvrdnja slijedi jer je

$$(\text{c.l.s.} \{ (I - P_n)H;\ n=1,2,\dots \})^{\perp} = \bigcap \{ P_nH;\ n=1,2,\dots \}$$

Ovim je lema dokazana.

TEOREM 2.4. Neka je E J-spektralna funkcija sa jedinstvenom kritičnom tačkom α. Tada su sljedeće tvrdnje ekvivalentne:

(1) kritična tačka α je regularna,

(2) prostor H može se predstaviti kao direktna J-ortogonalna suma

$$H = W_{\alpha} \dot{+} W_{\alpha}^{+} \dot{+} W_{\alpha}^{-}, \tag{2.4}$$

(3) postoji konstanta $K < \infty$ za koju je

$$\| E(\Delta) \| \leq K \qquad \text{za sve} \quad \Delta \in \mathcal{A}(S \setminus \{\alpha\}).$$

Dokaz. (1) $\Rightarrow$ (2). Stavimo $\Delta_n^+ = \bigcup \{ \Delta_j ; j=1,2,\dots,n \}$, pri čemu su Δ_j, $j=1,2,\dots$ komponente povezanosti koje obrazuju otvoren skup $\mathcal{O}^+$ iz leme 2.1. Vrijedi $\Delta_n^+ \subseteq \Delta_{n+1}^+$, $\alpha \notin \Delta_n^+$, $n=1,2,\dots$ i $\bigcup \{ \Delta_n^+, n=1,2,\dots \} = \mathcal{O}^+$. Pošto je tačka α regularna kritična tačka postoji $\lim E(S \setminus \Delta_n^+)$ u jakoj konvergenciji operatora. Odavde slijedi da je niz normi $(\| E(\Delta_n^+) \|)$ ograničen. Niz J-ortogonalnih projekcija $(E(\Delta_n^+))$ ispunjava uslove leme 2.3. pa je potprostor c.l.s. $\{ E(\Delta_n^+);\ n=1,2,\dots \} = W_{\alpha}^+$ J-ortogonalno dopunjiv. Analogno se dokaže da je i W_{α}^- J-ortogonalno dopunjiv potprostor, pa je i potprostor $W_{\alpha}^+ + W_{\alpha}^-$ J-ortogonalno dopunjiv (teorem 1.16). Zbog (2.2) vrijedi (2.4).

$(2) \Rightarrow (3)$. Potprostori W_α, W_α^+ i W_α^- su invarijantni u odnosu na svaki operator $E(\Delta)$, $\Delta \in \mathcal{A}(S \setminus \{\alpha\})$. Potprostori W_α^+ i W_α^- su uniformno definitni prema korolaru 1.17. pa postoji konstanta $\delta > 0$ za koju je

$$|[x,x]| \leqslant \|x\|^2 \leqslant \delta^2 |[x,x]| \qquad \text{za sve} \quad x \in W_\alpha^+ \cup W_\alpha^- .$$

Prostori $(W_\alpha^+, [\cdot,\cdot])$ i $(W_\alpha^-, -[\cdot,\cdot])$ su Hilbertovi prostori i restrikcije $E(\Delta)|W_\alpha^+$ i $E(\Delta)|W_\alpha^-$, $\Delta \in \mathcal{A}(S \setminus \{\alpha\})$, operatora $E(\Delta)$ na potprostor W_α^+, odnosno W_α^-, su ortogonalne projekcije na odgovarajućim Hilbertovim prostorima. Označimo sa P_0, P_1, P_2 J-ortogonalne projekcije na potprostore W_α, W_α^+, W_α^- respektivno. Tada vrijedi:

$$\|E(\Delta)P_i x\|^2 \leqslant \delta^2 \left|[E(\Delta)P_i x, P_i x]\right| \leqslant \delta^2 \left|[P_i x, P_i x]\right| \leqslant$$
$$\leqslant \delta^2 \|P_i x\|^2 \leqslant \delta^2 \|P_i\|^2 \|x\|^2 \quad (\Delta \in \mathcal{A}(S \setminus \{\alpha\}), x \in H, i=1,2)$$

Za operator $E(\Delta)P_0$, $\Delta \in \mathcal{A}(S \setminus \{\alpha\})$ vrijedi $E(\Delta)P_0 x = P_0 x$ za $\alpha \in \Delta$ i $E(\Delta)P_0 x = 0$ za $\alpha \notin \Delta$. Dakle u svakom slučaju $\|E(\Delta)P_0\| \leqslant \|P_0\|$. Pošto je $E(\Delta) = E(\Delta)P_0 + E(\Delta)P_1 + E(\Delta)P_2$ vrijedi:

$$\|E(\Delta)\| \leqslant \|P_0\| + \delta \|P_1\| + \delta \|P_2\| , \qquad \Delta \in \mathcal{A}(S \setminus \{\alpha\}).$$

Time je dokazano da $(2) \Rightarrow (3)$.

$(3) \Rightarrow (1)$. Neka je (Δ_n) proizvoljan niz za koji vrijedi $\Delta_n \in \mathcal{A}(S \setminus \{\alpha\})$ $\alpha \in \Delta_n$, $\Delta_n \supseteq \Delta_{n+1}$, $n=1,2,\ldots$. Niz J-ortogonalnih projekcija $(E(\Delta_n))$ ispunjava zbog (3) pretpostavke leme 2.3. pa postoji $\lim E(\Delta_n)$ u jakoj konvergenciji operatora. Time je teorem dokazan.

Na isti način kao što je u dokazu teorema 2.4.

dokazano da (2) $\Rightarrow$ (3) može se dokazati da je za fiksiran $\Delta_o \in \mathcal{A}(S \setminus c(E))$, $\Delta_o \cap c(E) = \emptyset$ familija operatora $\{E(\Delta \cap \Delta_o);\ \Delta \in \mathcal{A}(S \setminus c(E))\}$ uniformno ograničena. Stvarno, pošto je $\Delta_o \cap c(E) = \emptyset$, skup $S \setminus \Delta_o \in \mathcal{A}(S \setminus c(E))$ je okolina skupa $c(E)$, pa se izvan skupa $S \setminus \Delta_o$ nalazi samo konačno mnogo komponenata povezanosti skupa $\theta^+ \cup \theta^-$ (θ^+, θ^- su iz leme 2.1. u kojoj uslov $c(E) = \{\alpha\}$ nije bio bitno ograničenje). Dakle $\Delta_o \cap \theta^{\pm} =: \Delta_o^{\pm} \in \mathcal{A}(S \setminus c(E))$ i očigledno vrijedi $E(\Delta_o) = E(\Delta_o^+) + E(\Delta_o^-)$. Prostori $(E(\Delta_o^+)H, [\cdot,\cdot])$ i $(E(\Delta_o^-)H, -[\cdot,\cdot])$ su Hilbertovi prostori i restrikcije operatora $E(\Delta \cap \Delta_o)$, $\Delta \in \mathcal{A}(S \setminus c(E))$ na ove prostore su ortogonalni projektori u tim prostorima. Postoji realan broj $\delta > 0$ takav da je

$$|[x,x]| \leqslant \|x\|^2 \leqslant \delta^2 |[x,x]| \quad \text{za sve} \quad x \in E(\Delta_o^{\pm})H.$$

Sada vrijedi

$$\begin{aligned}
\|E(\Delta \cap \Delta_o)x\| &\leqslant \|E(\Delta)\, E(\Delta_o^+)x\| + \|E(\Delta)\, E(\Delta_o^-)x\| \leqslant \\
&\leqslant \delta(|[E(\Delta)E(\Delta_o^+)x,x]|^{1/2} + |[E(\Delta)E(\Delta_o^-)x,x]|^{1/2}) \leqslant \\
&\leqslant \delta(|[E(\Delta_o^+)x,x]|^{1/2} + |[E(\Delta_o^-)x,x]|^{1/2}) \leqslant \\
&\leqslant \delta(\|E(\Delta_o^+)x\| + \|E(\Delta_o^-)x\|) \leqslant \\
&\leqslant \delta(\|E(\Delta_o^+)\| + \|E(\Delta_o^-)\|)\|x\| \qquad (x \in H).
\end{aligned}$$

Dakle familija operatora $\{E(\Delta \cap \Delta_o),\ \Delta \in \mathcal{A}(S \setminus c(E))\}$ je uniformno ograničena.

DEFINICIJA 2.4. Za J-spektralnu funkciju E definisanu na familiji $\mathcal{A}(S \setminus c(E))$ kažemo da je <u>svojstvena spektralna funkcija</u> operatora A iz H u H ako za svaki $\Delta \in \mathcal{A}(S \setminus c(E))$ vrijedi:

(a) $E(\Delta)(\mathrm{dom}(A)) \subseteq \mathrm{dom}(A)$ i

$E(\Delta)Ax = AE(\Delta)x \quad (x \in \mathrm{dom}(A))$

(b) $\sigma_e(A \mid E(\Delta)H) \subseteq Cl(\Delta)$.

Iz uslova (b) je jasno da ako je J-spektralna funkcija E svojstvena spektralna funkcija operatora A onda je $\sigma_e(A) \subseteq S$, pa operator A može biti neograničen samo ako je $S = \overline{\mathbb{R}}$. U daljem kada se javlja $\infty \in S$ uvijek smatramo $S = \overline{\mathbb{R}}$.

TEOREM 2.5. Neka je J-spektralna funkcija E svojstvena spektralna funkcija J-unitarnog (resp. J-hermitskog) operatora A. Tada vrijedi

(c) $\sigma_e(A) = \mathrm{supp}(E)$,

(d) za $\Delta_0 \in \mathcal{A}(S \setminus c(E))$, $\Delta_0 \cap c(E) = \emptyset$ vrijedi

$$A|E(\Delta_0)H = \int_{\Delta_0} s\, dE(s),$$ za ograničen operator $A|E(\Delta_0)H$; pri čemu integral konvergira u uniformnoj konvergenciji operatora, a

$$AE(\Delta_0)x = \int_{\Delta_0} s\, dE(s)x, \quad x \in \mathrm{dom}(A)$$ za neograničen operator $A|E(\Delta_0)H$.

Dokaz. (c) Neka je Δ otvoren interval iz $\mathcal{A}(S \setminus c(E))$ sadržan u $\rho(A)$, $Cl(\Delta) \cap \sigma_e(A) = \emptyset$ i pretpostavimo da vrijedi $E(\Delta) \neq 0$. Tada je $\sigma_e(A|E(\Delta)H) \neq \emptyset$. Stvarno, za neograničen operator A $\infty \notin Cl(\Delta)$, a $\sigma_e(A|E(\Delta)H) \subseteq Cl(\Delta)$ pa je operator $A|E(\Delta)H$ ograničen. Ako je operator A ograničen onda je tim prije i operator $A|E(\Delta)H$ ograničen. U oba slučaja vrijedi $\sigma(A|E(\Delta)H) \neq \emptyset$ ([12], teorem 3. str.169). S druge strane je $\sigma(A|E(\Delta)H) \subseteq \sigma_e(A)$ jer je potprostor $E(\Delta)H$ J-ortogonalno dopunjiv i reducira operator A, tj. vrijedi $A(E(\Delta)H) \subseteq E(\Delta)H$ i $A(E(S\setminus\Delta)H) \subseteq E(S\setminus\Delta)H$. Dakle vrijedi $\sigma_e(A) \cap Cl(\Delta) \neq \emptyset$ što je prema izboru intervala Δ nemoguće, pa mora biti $E(\Delta) = 0$. Time je dokazano da vrijedi $\rho(A) \subseteq S\setminus supp(E)$. Obrnuto, za otvoren interval Δ, $\Delta \subseteq S\setminus supp(E)$ je $E(\Delta) = 0$, pa je $E(S\setminus\Delta) = I$. Prema (b) iz definicije 2.4. je

$$\sigma_e(A) = \sigma_e(A \mid E(S\setminus\Delta)H) \subseteq Cl(S\setminus\Delta) = S\setminus\Delta ,$$

pa je $\Delta \subseteq \rho(A)$. Specijalno za $\infty \notin supp(E)$ operator A je ograničen. (Uzimamo za Δ okolinu od ∞, pa $\infty \notin S\setminus\Delta$, a $\sigma_e(A) \subseteq S\setminus\Delta$.) Ovim je dokazana i inkluzija $S\setminus supp(E) \subseteq \rho(A)$, pa vrijedi $\sigma_e(A) = supp(E)$.

(d) Neka je $\Delta_o \in \mathcal{A}(S\setminus c(E))$, $\Delta_o \cap c(E) = \emptyset$. Koristimo razmatranja koja su prethodila definiciji 2.4. Definišimo preslikavanja E^+, E^-, i E_o:

$$E_o^{\pm} : \Delta \longmapsto E(\Delta \cap \Delta_o^{\pm}), \qquad \Delta \in \mathcal{A}(S\setminus c(E)).$$

Jasno je da ova preslikavanja možemo smatrati definisanim na algebri $\mathcal{A}(S)$ jer je skup $S\setminus\Delta_o$ okolina skupa $c(E)$. Prebrojivo aditivne funkcije

$$\Delta \longmapsto E^{\pm}(\Delta)\, E(\Delta_o^{\pm})H \qquad (\Delta \in \mathcal{A}(S\setminus c(E)))$$

(vidjeti uslov 4) iz definicije 2.2.) mogu se produžiti do hermitskih spektralnih mjera ([4] X.1. str.888 i 892) u Hilbertovom prostoru $(E(\Delta_o^{\pm})H, |[\cdot,\cdot]|)$ ([3] teorem 3. str.127). Ove hermitske spektralne mjere su dekompozicije jedinice unitarnog (resp. hermitskog) operatora $A|E(\Delta_o^{\pm})H$ (u Hilbertovom prostoru $(E(\Delta_o^{\pm})H, |[\cdot,\cdot]|)$) jer zadovoljavaju uslove analogne sa (a) i (b) iz definicije 2.4.

([4] X.1. str.889). Prema spektralnom teoremu ([3] teoremi 1 i 2 str.138) imamo da je

$$A|E(\Delta_o^{\pm})H = \int_S s\, dE^{\pm}(s)|E(\Delta_o^{\pm})H$$

za ograničen operator $A|E(\Delta_o)H$, pri čemu integral sa desne strane konvergira u odnosu na uniformnu konvergenciju operatora. Za neograničen operator $A|E(\Delta_o)H$ je

$$AE(\Delta_o^{\pm})x = \int_S s\, dE^{\pm}(s)x, \qquad x \in \mathrm{dom}(A).$$

Na osnovu definicije funkcija E^+, E^-, E_o sada imamo da je

$$AE(\Delta_o) = AE(\Delta_o^+) + AE(\Delta_o^-) = \int_S s\, dE^+(s) + \int_S s\, dE^-(s) =$$

$$= \int_S s\, dE_o(s) = \int_S s\, \chi_{\Delta_o}(s)\, dE_o(s) = \int_{\Delta_o} s\, dE_o(s) =$$

$$= \int_{\Delta_o} s\, dE(s),$$

za ograničen operator $A|E(\Delta_o)H$, i analogno za neograničen operator $A|E(\Delta_o)H$. J-spektralnu funkciju E ograničenu na podskupove skupa Δ_o možemo proširiti do ograničene spektralne mjere u Hilbertovom prostoru $(E(\Delta_o)H,(\cdot,\cdot))$, definisane na σ-algebri Borelovih podskupova skupa Δ_o. Isto tako prebrojivo aditivnu funkciju E_o možemo produžiti do ograničene spektralne mjere u Hilbertovom prostoru $(E(\Delta_o)H,(\cdot,\cdot))$ definisane na σ-algebri Borelovih podskupova skupa S. ([18] gl.IV str.226). Gornje integrale uzimamo u odnosu na ovako proširene mjere. Time je teorem dokazan.

Postupajući na isti način kao u dokazu tvrdnje (d), teorema 2.5., može se dokazati da za svaku kompleksnu funkciju f koja je analitička na nekoj okolini spektra $\sigma_e(A)$ vrijedi

$$f(A)|E(\Delta_o)H = \int_{\Delta_o} f(s)\, dE(s)$$

gdje je operator sa lijeve strane definisan Riesz-Dunfordovim funkcionalnim računom, a integral sa desne strane konvergira u uniformnoj konvergenciji operatora.

TEOREM 2.6. Operator A iz H u H može imati najviše jednu svojstvenu spektralnu funkciju.

Dokaz. Neka su E_1 i E_2 svojstvene spektralne funkcije operatora A i neka su $c(E_1)$ i $c(E_2)$ skupovi njihovih kritičnih tačaka. S obzirom na uslov 4) iz definicije 2.2. Da bi dokazali da su svojstvene spektralne funkcije E_1 i E_2 identične na $\mathcal{A}(S\setminus(c(E_1)\cup c(E_2)))$ dovoljno je dokazati da su ove funkcije identične na zatvorenim skupovima iz $\mathcal{A}(S\setminus(c(E_1)\cup c(E_2)))$. Neka su Δ i Δ' iz $\mathcal{A}(S\setminus(c(E_1)\cup c(E_2)))$, Δ zatvoren skup, Δ' otvoren skup i $\Delta\subseteq\Delta'$. Neka je $x\in E_1(\Delta)H$. Posmatrajmo jednakost

$$R(z,A)x = R(z,A)E_2(\Delta')x + R(z,A)E_2(S\setminus\Delta')x, \qquad (2.5)$$

Stavljajući $R(z,A)x = R(z,A\mid E_1(\Delta)H)x,$

$z\in \rho(A\mid E_1(\Delta)H)\supseteq \mathbb{C}\setminus\Delta$,

vidi se da se lijeva strana ove jednakosti može analitički produžiti na skup $\mathbb{C}\setminus\Delta$. Analogno funkcija $z\longmapsto R(z,A)E_2(\Delta')x$ može se analitički produžiti na skup $\mathbb{C}\setminus \mathrm{Cl}(\Delta')$, a $z\longmapsto R(z,A)E_2(S\setminus\Delta')x$ na skup Δ'. Dakle prema jednakosti (2.5) ovako produžena funkcija $z\longmapsto R(z,A)E_2(S\setminus\Delta')x$ može imati singularitete samo u krajnjim tačkama intervala Δ'. Neka je β jedna krajnja tačka intervala Δ'. Integrirajmo jednakost (2.5) po kružnici Γ_β sa centrom u β i poluprečnikom dovoljno malim da kružnica ne siječe interval Δ. Tada imamo

$$0 = E_2(\Delta')\int_{\Gamma_\beta} R(z,A)x\,dz + E_2(S\setminus\Delta')\int_{\Gamma_\beta} R(z,A)x\,dz$$

Oba integrala sa desne strane posljednje jednakosti su jednaka nuli, pa je funkcija $z \longmapsto R(z,A)E_2(S\setminus\Delta')x$ analitička u cijeloj kompleksnoj ravni. Neka je Γ rektifikabilna Jordanova kriva koja sadrži skup Δ u svojoj unutrašnjosti. Tada je

$$(2\pi i)^{-1}\int_{\Gamma} R(z,A)x\,dz = x, \text{ a } (2\pi i)^{-1}\int_{\Gamma} R(z,A)E_2(S\setminus\Delta')x\,dz=0.$$

Dakle $E_2(S\setminus\Delta')x = 0$ za sve x iz $E_1(\Delta)H$. Time je dokazano da je $E_2(\Delta')x = x$ za sve x iz $E_1(\Delta)H$, tj. $E_2(\Delta')H \supseteq E_1(\Delta)H$, čim je $\Delta' \supseteq \Delta$, Δ' otvoren skup, Δ zatvoren skup iz $\mathcal{A}(S\setminus(c(E_1) \cup c(E_2)))$. Neka je (Δ_n) niz otvorenih skupova iz $\mathcal{A}(S\setminus(c(E_1) \cup c(E_2)))$, $\Delta_n \supseteq \Delta_{n+1}$, $\Delta_n \supseteq \Delta$, $n=1,2,\ldots$ i $\bigcap \Delta_n = \Delta$. Tada je prema uslovu 4) iz definicije 2.2. $\lim E_2(\Delta_n) = E_2(\Delta)$, a na osnovu već dokazanog je $E_2(\Delta)H \supseteq E_1(\Delta)H$. Zamjenjujući uloge svojstvenih spektralnih funkcija E_1 i E_2 dobijamo da je $E_1(\Delta) = E_2(\Delta)$ za sve zatvorene skupove Δ iz $\mathcal{A}(S\setminus(c(E_1) \cup c(E_2)))$, pa su funkcije E_1 i E_2 identične na $\mathcal{A}(S\setminus(c(E_1) \cup c(E_2)))$. Na osnovu ovoga lako se pokaže da je $c(E_1) = c(E_2)$. Stvarno, za proizvoljan skup $\Delta \in \mathcal{A}(S\setminus c(E_j))$, $j=1,2$ postoji skup $\Delta' \in \mathcal{A}(S\setminus(c(E_1) \cup c(E_2)))$ takav da je $\Delta' \subseteq \Delta$, pa je $\alpha \in c(E_j)$ ako i samo ako je za svaki skup $\Delta \in \mathcal{A}(S\setminus(c(E_1) \cup c(E_2)))$ potprostor $E_j(\Delta)H$, $j=1,2$ indefinitan. Dakle $\alpha \in c(E_1)$ ako i samo ako $\alpha \in c(E_2)$. Ovim je teorem dokazan.

III. POZITIBILNI J-UNITARNI OPERATORI. SPEKTRALNI TEOREM

DEFINICIJA 3.1. Za J-unitaran operator U kažemo da je <u>pozitibilan</u> ako postoji funkcija g iz $\mathcal{F}(U)$, koja se ne poništava ni na jednoj komponenti njenog područja analitičnosti, za koju vrijedi

$$[g(U)x,x] \geqslant 0 \qquad (x \in H) \tag{3.1}$$

Za funkciju g iz ove definicije kažemo da je <u>pozitivirajuća funkcija</u> operatora U.

Poznato je da je svaki J-unitaran operator u prostoru Pontrjagina Π_k pozitibilan ([6] teorem 12.1. i [17] (b) str.11.).

PROPOZICIJA 3.1. Pozitivirajuća funkcija g operatora U na njegovom spektru uzima realne vrijednosti i funkcija g u spektru operatora U ima samo konačno mnogo nula.

Dokaz. Prema teoremu o preslikavanju spektra ([12] teorem 8, str.483) vrijedi $\sigma(g(U)) = g(\sigma(U))$. Ograničen operator $g(U)$ je prema (3.1) J-pozitivan pa je njegov spektar, prema propoziciji 1.27., realan. Dakle $g(\sigma(U)) \subseteq \mathbb{R}$. Da bi dokazali drugu tvrdnju propozicije stavimo

$$N(g) := \{ z \in \mathbb{C} : g(z) = 0 \}.$$

Dokazaćemo da je $N(g) \cap \sigma(U)$ konačan skup. Ako bi naime skup $N(g) \cap \sigma(U)$ bio beskonačan zbog kompaktnosti skupa $\sigma(U)$ postojao bi konvergentan niz međusobno različitih članova (z_n) takav da $z_n \in N(g) \cap \sigma(U)$, $n=1,2,\ldots$, $z_n \to z_0$ $(n \to \infty)$, $z_0 \in \sigma(U)$. Pošto $z_0 \in \sigma(U)$ postoji jedna otvorena komponenta povezanosti

Ω područja analitičnosti funkcije g koja sadrži tačku z_o, pa postoji prirodan broj n_o takav da je $z_n \in \Omega$ za $n \geqslant n_o$. Odavde slijedi ([22] , teorem 2.7.) da se funkcija g poništava na komponenti Ω svog područja analitičnosti jer u komponenti Ω leže međusobno različite nule z_n, $n \geqslant n_o$, funkcije g i $z_n \longrightarrow z_o$ $(n \longrightarrow \infty)$, $z_o \in \Omega$. Ovo je prema definiciji 3.1. nemoguće, pa je skup $N(g) \cap \sigma(U)$ konačan. Primijetimo da je u dokazu posljednje činjenice bilo važno samo da je skup $\sigma(U)$ kompaktan i da je sadržan u području analitičnosti funkcije g. Tako je propozicija dokazana.

Neka je g pozitivirajuća funkcija J-unitarnog operatora U. U dokazu propozicije 1.32. pokazano je da vrijedi

$$[g(U)x,x] = [x,g^*(U)x] \qquad (x \in H),$$

dakle i funkcija g^* je pozitivirajuća za operator U. Funkcija

$$\hat{g}(z) = g(z) + g^*(z) \qquad (z \in \mathrm{dom}(g) \cap (\mathrm{dom}(g))^*) \quad (3.2)$$

je takođe pozitivirajuća funkcija operatora U i za nju vrijedi

$$\hat{g}(z^*) = \overline{\hat{g}(z)} \qquad (z \in \mathrm{dom}(\hat{g})) \qquad (\text{tj. } \hat{g}^* = \hat{g}), \qquad (3.3)$$

pa je funkcija $\hat{g}$ realna na jediničnoj kružnici C kompleksne ravni (u onim tačkama u kojim je definisana).

Od sada ćemo pod pojmom pozitivirajuća funkcija J-unitarnog operatora podrazumijevati funkciju koja ima osobinu (3.3).

LEMA 3.2. Neka je U pozitibilan J-unitaran operator i neka je g njegova pozitivirajuća funkcija. Tada vrijedi $z_o \in \sigma(U) \setminus C = \sigma_o(U)$ ako i samo ako je z_o nula svake pozitivirajuće funkcije operatora U. Red nule $z_o \in \sigma_o(U)$ funkcije g nije manji od njenog Rieszovog indeksa u odnosu na operator U. Za funkciju g postoji pozitivirajuća funkcija g_o za koju je $N(g_o) \setminus C = \sigma_o(U)$, red nule funkcije g_o iz skupa $\sigma_o(U)$ je jednak njenom Rieszovom indeksu i $N(g_o) \cap C = N(g) \cap C$. Specijalno je skup $\sigma_o(U)$ konačan i simetričan u odnosu na jediničnu kružnicu C i Rieszov indeks svake tačke iz $\sigma_o(U)$ je veći od nule.

Dokaz. Neka je $z_o \neq 0$ kompleksan broj, $z_o \notin C$ i neka je g pozitivirajuća funkcija operatora U, za koju vrijedi $g(z_o) \neq 0$. Lako se vidi da postoji tačka $\lambda_o \in \rho(U)$ takva da funkcija

$$h(\lambda_o, z) = g(z)\,(z-\lambda_o)^{-1}\left(\frac{1}{z} - \frac{1}{\lambda_o^*}\right)^{-1} \qquad (z \in \mathrm{dom}(g) \setminus \{\lambda_o, \lambda_o^*\})$$

ima vrijednost koja nije realan broj za $z = z_o$. Naime

$$\mathrm{Im}\,((z_o-\lambda)\,(z_o^{-1} - \bar{\lambda})) = 0 \Leftrightarrow \mathrm{Im}(|z_o|^{-2}\lambda \bar{z}_o + \bar{\lambda} z_o) = 0$$

Posljednja jednakost je, zbog $|z_o| \neq 1$ ekvivalentna sa $\mathrm{Im}(\lambda \bar{z}_o) = 0$, što je ispunjeno ako i samo ako je $\lambda = a\, z_o$ $(a \in \mathbb{R})$. Dakle u slučaju da broj $g(z_o)$ nije realan dovoljno je uzeti $\lambda_o = a_o z_o$ $(a_o \neq 1,\ a_o \neq |z_o|^{-2})$ i $\lambda_o \in \rho(U)$. U slučaju da je broj $g(z_o)$ realan dovoljno je uzeti broj $\lambda_o \in \rho(U)$ i $\lambda_o \neq a z_o$ $(a \in \mathbb{R})$. U daljem je $\lambda_o \in \rho(U)$ izabrano tako da $h(\lambda_o, z_o) \notin \mathbb{R}$.

Stavimo $h(U) = h(\lambda_o, U)$. Imamo da je

$$[h(U)x,x] = [g(U)\,(U-\lambda_o I)^{-1}(U^{-1}-\bar{\lambda}_o I)^{-1}x,x] =$$

$$= [g(U)\,(U-\lambda_o I)^{-1}x,(U-\lambda_o I)^{-1}x] \geqslant 0 \qquad (x\in H)$$

Prema propoziciji 1.27. odavde slijedi $\sigma(h(U))\subseteq\mathbb{R}$. S druge strane prema teoremu o preslikavanju spektra vrijedi $h(\sigma(U)) = \sigma(h(U))\subseteq\mathbb{R}$ pa je $z_o\in\rho(U)$. Dakle tačka $z_o\in\sigma_o(U)$ mora biti nula svake pozitivirajuće funkcije J-unitarnog operatora U. Specijalno, za proizvoljnu pozitivirajuću funkciju g operatora U je $\sigma_o(U)\subseteq N(g)\cap\sigma(U)$, a posljednji skup je prema propoziciji 3.1. konačan.

Neka je $\Omega\subseteq\mathbb{C}$ otvoren skup na kome je funkcija g analitička, $\Omega\supseteq\sigma(U)$ i neka je Ω_o proizvoljan ograničen podskup skupa Ω za koji je $\sigma(U)\subseteq\Omega_o$, $Cl(\Omega_o)\subseteq\Omega$ i $0\notin Cl(\Omega_o)$. Skup $Cl(\Omega_o)$ je kompaktan i sadržan je u području analitičnosti Ω funkcije g pa prema propoziciji 3.1. funkcija g u skupu $Cl(\Omega_o)$ ima samo konačan broj nula. Konstruisaćemo sada pozitivirajuću funkciju g_1 operatora U koja u skupu $\Omega_o\setminus(C\cup\sigma_o(U))$ nema nula. Analogno zaključujemo da u skupu $Cl(\Omega_o^*)$ ima samo konačan broj nula funkcije g. Neka su $z_1,\dots,z_k$ sve nule funkcije g koje leže u $\Omega_o\cup\Omega_o^*$, ne pripadaju skupu $\sigma_o(U)$ i $|z_j|>1$, $j=1,2,\dots,k$. Zbog (3.3) tačke $z_1,\dots,z_k$ su nule funkcije g, one ne pripadaju skupu $\sigma_o(U)$ i $|z_j^*|<1$, $j=1,2,\dots,k$. Tako imamo sve nule funkcije g koje leže u skupu $(\Omega_o\cup\Omega_o^*)\setminus(C\cup\sigma_o(U))$. Lako se vidi da je red nula z_j i z_j^* funkcije g jednak i ovaj red označimo sa v_j, $j=1,\dots,k$. Definišimo

$$g_1(z) = g(z)\prod_{j=1}^{k}(z-z_j)^{-v_j}\left(\frac{1}{z}-\frac{1}{z_j^*}\right)^{-v_j} \qquad (z\in \mathrm{dom}(g))$$

Očigledno da je funkcija g_1 pozitivirajuća funkcija operatora U i da u skupu $\Omega_o \cup \Omega_o^*$ nema nula van skupa $\sigma_o(U) \cup C$. U daljem funkciju g_1 možemo smatrati definisanom na skupu $\Omega_o \cup \Omega_o^*$, tako da je $N(g_1) \setminus C = \sigma_o(U)$.

Pretpostavimo sada da $z_o, z_o^* \in \sigma_o(U)$. Prema propoziciji 1.39. Rieszovi indeksi brojeva z_o i z_o^* u odnosu na J-unitaran operator U su jednaki i taj indeks označimo sa ν_o. Red nula z_o i z_o^* funkcije g_1 označimo sa v_o. Prema teoremu 1.34. potprostori $E(\{z_o\})H$ i $E(\{z_o^*\})H$ su neutralni, pa za $y_1 \in E(\{z_o\})H$ i $y_2 \in E(\{z_o^*\})H$ vrijedi

$$[g_1(U)\ (y_1 \pm y_2), y_1 \pm y_2] = \pm [g_1(U)y_1, y_2] \pm [g_1(U)y_2, y_1] \geq 0$$

Odavde slijedi da je $[g_1(U)x, x] = 0$, $x \in E(\{z_o, z_o^*\})H$ i pošto je operator $g_1(U)$ J-pozitivan prema Schwarzovoj nejednakosti (1.28) je $[g_1(U)x, y] = 0$, $x, y \in E(\{z_o, z_o^*\})H$. Projektor $E(\{z_o, z_o^*\})$ je J-hermitski operator prema teoremu 1.34. i on komutira sa operatorom $g_1(U)$ pa je $[g_1(U)x, y] = 0$, $x \in E(\{z_o, z_o^*\})H$, $y \in H$, tj. $g_1(U)x = 0$, $x \in E(\{z_o, z_o^*\})H$. Specijalno $g_1(U)|E(\{z_o\})H = 0$. Stavimo

$$g_2(z) = g_1(z)\ (z - z_o)^{-v_o} \qquad (z \in \mathrm{dom}(g_1))$$

Pošto je $\sigma(U|E(\{z_o\})H) = \{z_o\}$ i $g_2(z_o) \neq 0$ imamo da $0 \notin \sigma(g_2(U)|E(\{z_o\})H)$. Kako je

$$g_2(U)\ (U - z_oI)^{v_o} E(\{z_o\})H = g_1(U)E(\{z_o\})H = \{0\},$$

mora dakle biti

$$(U - z_oI)^{v_o}\ E(\{z_o\})H = \{0\}$$

Prema teoremu 1.38. odavde slijedi da je $\nu_o \leq v_o$. Funkcija

$$g_3(z) = g_1(z)\,(z - z_o)^{\nu_o - v_o}\,\left(\frac{1}{z} - \frac{1}{z_o^*}\right)^{\nu_o - v_o} \quad (z \in \mathrm{dom}(g_1))$$

je pozitivirajuća funkcija operatora U. Naime ova funkcija ima u tačkama z_o i z_o^* nule reda ν_o pa se njena operatorska vrijednost za operator U poništava na potprostoru $E(\{z_o, z_o^*\})H$, prema teoremu 1.38. Projektor $E(\{z_o, z_o^*\})$ je J-hermitski operator pa je potprostor $E(\sigma(U) \setminus \{z_o, z_o^*\})H$ J-ortogonalni komplement potprostora $E(\{z_o, z_o^*\})H$ i na njemu je definisan operator $(U - z_oI)^{\nu_o - v_o}(U^{-1} - \bar{z}_oI)^{\nu_o - v_o}$, pa se lako dobije da je funkcija g_3 pozitivirajuća funkcija operatora U. Ako potpuno analogna razmatranja provedemo za ostale tačke iz $\sigma_o(U)$ dobijamo pozitivirajuću funkciju g_o operatora U sa osobinama navedenim u lemi. Time je lema dokazana.

Na osnovu ove leme Kreinov prostor H može se predstaviti kao direktna J-ortogonalna suma dvaju Kreinovih prostora $H_o = E(\sigma_o(U))H$ i $H_1 = E(\sigma(U) \cap C)H$. Oba potprostora reduciraju operator U i vrijedi $\sigma(U|H_o) = \sigma_o(U)$ i $\sigma(U|H_1) = \sigma(U) \cap C$. Dakle spektar operatora $U|H_o$ sastoji se od najviše konačno mnogo svojstvenih vrijednosti sa konačnim Rieszovim indeksima. Spektralni teorem za operatore čiji se spektar sastoji od konačno mnogo svojstvenih vrijednosti sa konačnim Rieszovik indeksima je sličan kao za operatore u konačno dimenzionalnim prostorima i dat je u [4] VII.3.22., ili [23] III 6.5. Iz dokaza leme 3.2. vidi se da za svaku pozitivirajuću funkciju g operatora U vrijedi

$$g(U)|H_o = g(U|H_o) = 0,$$

pa je J-unitaran operator $U|H_1$ pozitibilan. Djelomično vrijedi i obrnuta tvrdnja: Ako se dio spektra J-unitarnog operatora U koji leži van jedinične kružnice C sastoji od konačno mnogo svojstvenih vrijednosti sa konačnim Rieszovim indeksima i ako je J-unitaran operator $U|E(\sigma(U) \cap C)H$ pozitibilan onda je i operator U pozitibilan. Dovoljno je naime pozitivirajuću funkciju operatora $U|E(\sigma(U) \cap C)H$ pomnožiti sa

$$\prod_{j=1}^{k} (z - z_j)^{\nu_j} \left(\frac{1}{z} - \frac{1}{z_j^*} \right)^{\nu_j}$$

pri čemu su $z_1, \dots, z_k$ tačke spektra operatora U koje leže van jedinične kružnice C i $\nu_1, \dots, \nu_k$ su njima odgovarajući Rieszovi indeksi (vidjeti teorem 1.34. i 1.38.). S obzirom na prethodna razmatranja u daljem se možemo ograničiti na pozitibilne J-unitarne operatore sa spektrom na jediničnoj kružnici C.

Neka je g pozitivirajuća funkcija J-unitarnog operatora U čiji spektar leži na jediničnoj kružnici C i neka je Ω' ograničena otvorena okolina spektra $\sigma(U)$ operatora U. Za proizvoljan $x \in H$ sa

$$\varphi \longmapsto [\varphi(U)g(U)x, x] \qquad (\varphi \in \mathcal{F}(\mathrm{Cl}(\Omega'))) \qquad (3.4)$$

definisan je linearan funkcional na prostoru $\mathcal{F}(\mathrm{Cl}(\Omega'))$. Ovaj funkcional je pozitivan jer za pozitivnu funkciju φ iz $\mathcal{F}(\mathrm{Cl}(\Omega'))$ pomoću Riesz-Dunfordovog funkcionalnog računa možemo definisati operator $\varphi(U)^{1/2}$ koji je prema Korolaru 1.33. J-hermitski, pa vrijedi

$$[\varphi(U)g(U)x, x] = [g(U)\varphi(U)^{1/2}x, \varphi(U)^{1/2}x] \geqslant 0.$$

Prema propoziciji 6.3. str.298 u [12] odavde slijedi da je funkcional definisan u (3.4) neprekidan u odnosu na uniformnu konvergenciju u $\mathcal{F}(\mathrm{Cl}(\Omega'))$.

Kao što smo vidjeli možemo smatrati da je funkcija g definisana i analitička na otvorenom skupu Ω_3, $\Omega_3 \supseteq \sigma(U)$ i da nema nula u skupu $\Omega_3 \setminus C$. Neka je Ω_2 ograničen otvoren skup sadržan u Ω_3 sa osobinama $Cl(\Omega_2) \subseteq \Omega_3$, $\Omega_2 \supseteq \sigma(U)$. Analogno kao i u propoziciji 3.1. zaključujemo da u skupu $Cl(\Omega_2)$ ima samo konačan broj nula funkcije g i prema izboru funkcije g i skupa Ω_3 sve one leže na C. Sada je očigledno da možemo odabrati otvoren skup Ω_1, $\Omega_1 \subseteq \Omega_2$, $\Omega_1 \supseteq \sigma(U)$ i $Cl(\Omega_1) \cap N(g) = N(g) \cap \sigma(U)$, tj. funkcija g nema u skupu Ω_1 nula van skupa $\sigma(U)$. Presjek skupa Ω_1 i jedinične kružnice C sastoji se od najviše prebrojivo mnogo (u odnosu na C) otvorenih, povezanih i međusobno disjunktnih lukova od kojih samo konačan broj ima neprazan presjek sa spektrom $\sigma(U)$. Ove lukove označimo sa $\ell_1,\dots,\ell_m$. Funkcija g je neprekidna i realna (vidjeti (3.3)) na skupu $\bigcup \ell_j$ i u ovom skupu ima samo konačan broj nula i to su sve nule funkcije g koje leže u skupu $Cl(\Omega_1)$. Funkcija g je ograničena na skupu $Cl(\Omega_1)$, pa je ograničena i na skupu $\bigcup Cl(\ell_j)$. Prema izboru skupa Ω_1 funkcija g nije jednaka nuli u krajnjim tačkama lukova $\ell_1,\dots,\ell_m$. Označimo sa $\hat{g}$ neprekidno produženje funkcije g na C, uz uslov da $\hat{g}$ ima najmanji mogući broj nula i da je realna na C. Funkciju $\hat{g}$ definišimo na $C\setminus(\bigcup Cl(\ell_j))$ na primjer na sljedeći način: Skup $C\setminus(\bigcup Cl(\ell_j))$ je unija od m međusobno disjunktnih lukova. Neka su $\exp(it_0)$ i $\exp(it_1)$ $(i^2=-1)$ krajnje tačke jednog takvog luka, $0 < t_1 - t_0 < 2\pi$ i neka tačke oblika $\exp(i(\tau t_0 + (1-\tau)t_1))$, $\tau \in [0,1]$ ne pripadaju skupu $\bigcup \ell_j$. Tada stavljamo

$$\hat{g}(\exp(i(\tau t_0+(1-\tau)t_1)))=\tau g(\exp(it_0))+(1-\tau)g(\exp(it_1)) \quad (\tau\in[0,1]).$$

Funkcija $\hat{g}$ ima paran broj nula ako uzmemo u obzir višestruke nule onoliko puta kolika je njihova višestrukost. Označimo te nule sa $z_1,\dots,z_{2n}$. Definišimo

$$p(z):=\omega\prod_{j=1}^{n}(z - z_j)\left(\frac{1}{z} - \frac{1}{z_{n+j}}\right)c_j \qquad (z\in \mathbb{C}\setminus\{0\},\ \omega\in\{-1,1\}) \quad (3.5)$$

pri čemu je

$$c_j = \begin{cases} 1 + z_{n+j}/z_j & \text{za } z_j \neq -z_{n+j} \\ i & \text{za } z_j = -z_{n+j} \end{cases}, \quad j=1,\dots,n, \quad i^2 = -1$$

Napomenimo da su prema definiciji funkcije $\hat{g}$ sve nule van skupa $\sigma(U)$ jednostruke.

Uzimajući u obzir da je $z_j\,\bar{z}_j = 1$, $j=1,\dots,2n$ lako se provjerava da jednakost (3.3) vrijedi za svaki umnožak u definiciji trigonometrijskog polinoma p. Dakle jednakost (3.3) vrijedi i za trigonometrijski polinom p tj.

$$p(z^*) = \overline{p(z)} \qquad (z\in \mathbb{C}\setminus\{0\}).$$

Funkcija p je prema tome realna na C i mijenja znak u istim tačkama kao i funkcija $\hat{g}$. Izaberemo $\omega\in\{-1,1\}$ tako da bude $p(z)\,\hat{g}(z) \geqslant 0$, $z\in C$. Prema definiciji funkcije p i izboru funkcije g funkcija p/g je analitička na skupu Ω_1, a na skupu $\Omega_1 \cap C$ je pozitivna. Pošto je funkcija $p/\hat{g}$ pozitivna na skupu C i u tom skupu nema nula postoji realan broj $\delta>0$ takav da je $p(z)/\hat{g}(z) > 2\delta$, $z\in C$. Specijalno je $p(z)/g(z) > 2\delta$, $z\in\Omega_1 \cap C$. Neka je Ω otvoren podskup skupa Ω_1 sa sljedećim osobinama: skup $Cl(\Omega)$ je simetričan u odnosu na jediničnu kružnicu, $Re(p(z)/g(z)) > 2\delta$, $z\in\Omega$ i skup $\mathbb{C}\setminus Cl(\Omega)$ ima najviše dvije komponente. Ovakav skup postoji. Stvarno, funkcija $Re(p/g)$ je neprekidna na Ω_1, pa je skup $(\mathrm{Re}(p/g))^{-1}((2\delta, +\infty)) \cap \Omega_1$ otvoren, sadrži skup $\sigma(U) (\subseteq \Omega_1 \cap C)$, te se $\sigma(U)$ može prekriti sa konačno mnogo otvorenih krugova koji su sadržani u tom skupu. Označimo uniju tih konačno mnogo krugova sa Ω_o i stavimo $\Omega = \Omega_o \cup \Omega_o^* \subseteq \Omega_1$. Prema Mergeljanovom teoremu ([19] teorem 2.3. str. 44, [21] str. 390) funkcija p/g može se aproksimirati racionalnim funkcijama (koje imaju polove samo u 0 i ∞) uniformno na $\mathrm{Cl}(\Omega)$. Ove racionalne funkcije možemo odabrati tako da imaju osobinu (3.3). Stvarno ako racionalna funkcija r aproksimira funkciju p/g sa tačnošću $\varepsilon (\varepsilon > 0)$ onda i racionalna funkcija r^* aproksimira funkciju p/g sa tačnošću ε, jer funkcija p/g ima osobinu (3.3). Racionalna funkcija $(1/2)(r + r^*)$ ima osobinu (3.3) i aproksimira funkciju p/g sa tačnošću ε. Dalje ćemo uvijek aproksimirati funkciju p/g racionalnim funkcijama koje imaju osobinu (3.3). Neka racionalna funkcija r aproksimira funkciju p/g uniformno na $\mathrm{Cl}(\Omega)$ sa tačnošću ε. Ako uzmemo $0 < \varepsilon < \delta$ onda vrijedi

$$\{r(z) : z \in \mathrm{Cl}(\Omega)\} \subseteq \{z \in \mathbb{C} : \mathrm{Re}(z) > \delta\} .$$

Na osnovu ovoga, uzimajući jednu granu funkcije $z \longmapsto \sqrt{z}$, $z \in \mathrm{Cl}(\Omega)$, možemo jednoznačno definisati funkciju $z \longmapsto \sqrt{r(z)}$, $z \in \mathrm{Cl}(\Omega)$ koja je analitička funkcija na skupu Ω i na skupu $\Omega \cap C$ uzima pozitivne vrijednosti. Pomoću ove funkcije i Riesz-Dunfordovog funkcionalnog računa definisan je operator $r(U)^{1/2}$ koji je prema korolaru 1.33. J-hermitski operator. Dakle

$$[r(U)g(U)x,x] = [g(U)r(U)^{1/2}x, r(U)^{1/2}x] \geqslant 0 \quad (x \in H). \quad (3.6)$$

Neka je sada (r_k) niz racionalnih funkcija koji konvergira uniformno na $Cl(\Omega)$ ka funkciji p/g. Tada vrijedi ([12] teorem 9.6. str. 480)

$$\lim r_k(U) = (p/g)(U)$$

i $p(U) = (p/g)(U)\, g(U)$, pa je

$$\lim r_k(U)\, g(U) = p(U)$$

Za skoro sve operatore $r_k(U)$, $k=1,2,\ldots$ vrijedi nejednakost (3.6) pa je

$$[p(U)x,x] = \lim [r_k(U)g(U)x,x] \geqslant 0 \qquad (x \in H)$$

Time je dokazano da je i trigonometrijski polinom p pozitivirajuća funkcija J-unitarnog operatora U čiji spektar leži na jediničnoj kružnici C. S obzirom na razmatranja poslije dokaza leme 3.2. ovim je dokazan

TEOREM 3.3. J-unitaran operator U je pozitibilan ako i samo ako postoji trigonometrijski polinom p za koji vrijedi

$$[p(U)x,x] \geqslant 0 \qquad (x \in H).$$

Pri tome se trigonometrijski polinom p može odabrati tako da zadovoljava (3.3). U slučaju da je $\sigma(U) \subseteq C$ trigonometrijski polinom p može se odabrati tako da bude oblika (3.5), pri čemu sve nule trigonometrijskog polinoma u (3.5) leže na jediničnoj kružnici.

<u>Prostor $\mathcal{C}_q(z_o)$</u>. Označimo sa $A(z_o)$ skup svih kompleksnih funkcija koje su neprekidna na jediničnoj kružnici C kompleksne ravni i koje su u nekoj okolini

(u $\mathbb{C}$) tačke z_o, $|z_o| = 1$, analitičke. Na skupu $A(z_o)$ zadajemo sljedeću topologiju: Neka je $(\mathcal{U}_n)$ niz otvorenih okolina tačke z_o koji ima sljedeće osobine: $Cl(\mathcal{U}_n)$ je kompaktan skup i ne sadrži nulu, $\mathcal{U}_n \supseteq Cl(\mathcal{U}_{n+1})$, $Cl(\mathcal{U}_n)$ i $\mathbb{C} \setminus Cl(\mathcal{U}_n)$ su povezani skupovi, $n=1,2,\ldots$ i za svaku okolinu tačke z_o postoji prirodan broj n' koji zavisi od te okoline, tako da svi skupovi $\mathcal{U}_n$, $n \geqslant n'$ leže u toj okolini. Za proizvoljnu funkciju f definisanu na jediničnoj kružnici C stavljamo

$$\|f\| := \sup \left\{ |f(z)| : z \in C \right\}$$

Neka je $D_n(z_o)$ skup svih funkcija iz $A(z_o)$ koje su analitičke na nekoj okolini skupa $Cl(\mathcal{U}_n)$. Definišimo normu na vektorskom prostoru $D_n(z_o)$:

$$\|f\|_{n,q,z_o} = \max\left\{\|f\|, \sup\left\{|f^{(k)}(z)| : z \in Cl(\mathcal{U}_n)\right\}, 0 \leqslant k \leqslant q\right\} \quad (f \in D_n(z_o))$$

Normiran prostor $(D_n(z_o), \|\cdot\|_{n,q,z_o})$ označavamo sa $D_{n,q}(z_o)$. Jasno je

$$A(z_o) = \bigcup_{n=1}^{\infty} D_n(z_o).$$

Sa $A_q(z_o)$ označavamo prostor $A(z_o)$ snabdjeven najjačom lokalno konveksnom topologijom koja je na prostoru $D_{n,q}(z_o)$, $n=1,2,\ldots$ slabija od topologije određene gore definisanom normom. Lako se vidi da je ova topologija nezavisna od izbora niza $(\mathcal{U}_n)$. Neka je $f \in A_q(z_o)$ i neka $f \in D_{n,q}(z_o)$. Prema Mergeljanovom teoremu ([19], [21]) postoji niz racionalnih funkcija (r_n) (koje imaju pol samo u nuli tj. trigonometrijskih polinoma) koji konvergira uniformno na $C \cup Cl(\mathcal{U}_m)$ ka f. U slučaju da je funkcija f realna na C možemo odabrati racionalne funkcije r_n, $n=1,2,\ldots$ tako da i one budu realne na C.

Prema teoremu 10.27. ([21] str.214) niz $(r_n^{(k)})$ konvergira uniformno na $Cl(\mathcal{U}_{m+1})$ ka funkciji $f^{(k)}$ za proizvoljno $k=1,2,\ldots$. Dakle za proitvoljno $\varepsilon > 0$ postoji prirodan broj $N(\varepsilon)$ tako da je

$$\|r_n - f\|_{m+1,q,z_o} < \varepsilon \qquad (n \geqslant N(\varepsilon)).$$

Pošto je topologija inducirana sa $A_q(z_o)$ na $D_{m+1,q}(z_o)$ slabija od norma topologije na ovom prostoru odavde slijedi da niz (r_n) konvergira ka f u topologiji na $A_q(z_o)$. Time je dokazana

LEMA 3.4. Skup racionalnih funkcija (sa polom u nuli) je gust u prostoru $A_q(z_o)$.

U daljem ćemo često raditi sa kompleksnim funkcijama definisanim na jediničnoj kružnici C. Neka je g kompleksna funkcija definisana na C. Ako postoji granična vrijednost

$$\lim_{\substack{z \to \zeta \\ z,\zeta \in C}} \frac{g(z) - g(\zeta)}{z - \zeta}$$

reći ćemo da funkcija g ima izvod (ili preciznije izvod po kružnici) u tački ζ. Ovaj izvod označavaćemo sa $g'(\zeta)$. Kada bude riječ o izvodu funkcija koje su definisane samo na jediničnoj kružnici onda podrazumijevamo ovako definisan izvod po kružnici, a kada je riječ o izvodu funkcije definisane i van jedinične kružnice onda podrazumijevamo uobičajeno definisan izvod.

Sa $\mathcal{C}_q(z_o)$ označavamo skup svih komleksnih funkcija koje su neprekidne na jediničnoj kružnici C, a u nekoj okolini (u C) tačke z_o imaju neprekidne izvode reda $\leqslant q$.

Topologija na vektorskom prostoru $\mathscr{C}_q(z_o)$ zadata je slično kao i na $A_q(z_o)$. Naime, neka je $(\mathcal{O}_n)$ niz otvorenih okolina (u C) tačke z_o koji ima sljedeće osobine : $\mathcal{O}_1 \subsetneqq C$, $\mathcal{O}_n$ je povezan skup, $\mathcal{O}_n \supseteq Cl(\mathcal{O}_{n+1})$, $n=1,2,\ldots$ i za svaku okolinu $\mathcal{V}$ tačke z_o postoji prirodan broj $n(\mathcal{V})$ takav da je $\mathcal{O}_n \subseteq \mathcal{V}$, za $n \geq n(\mathcal{V})$. Neka je $\mathcal{D}_{m,q}(z_o)$ skup svih funkcija iz $\mathscr{C}_q(z_o)$ koje imaju neprekidne izvode reda $\leq q$ na $Cl(\mathcal{O}_m)$. Jasno je $\mathscr{C}_q(z_o) = \bigcup_{n=1}^{\infty} \mathcal{D}_{n,q}(z_o)$. Na prostoru $\mathcal{D}_{m,q}(z_o)$ definišemo normu :

$$\|f\|'_{m,q,z_o} = \max\{\{\sup|f(z)|, z\in C\}, \sup\{|f^{(\nu)}(z)|, z\in Cl(\mathcal{O}_m)\}, 0\leq\nu\leq q\} \quad (f\in\mathcal{D}_{m,q}(z_o))$$

Smatramo da je prostor $\mathscr{C}_q(z_o)$ snabdjeven najjačom lokalno konveksnom topologijom koja je na prostoru $\mathcal{D}_{m,q}(z_o)$, $m=1,2,\ldots$ slabija od topologije odredene gore definisanom normom. Lako se vidi da je ova topologija nezavisna od izbora niza $(\mathcal{O}_n)$.

LEMA 3.5. Skup $A_q(z_o)$ je gust u prostoru $\mathscr{C}_q(z_o)$.

Dokaz. Neka je $g\in\mathcal{D}_{m,q}(z_o)$. Prema definiciji prostora $\mathcal{D}_{m,q}(z_o)$ funkcija g ima neprekidan q-ti izvod na luku $Cl(\mathcal{O}_m)$. Prema Mergeljanovom teoremu ([21] teorem 20.5,str.386) postoji polinom P_q za koji vrijedi

$$|P_q(z) - g^{(q)}(z)| < \varepsilon/2(2\pi)^q \qquad (z\in Cl(\mathcal{O}_m)),$$

pri čemu je $\varepsilon > 0$ unaprijed odabran broj. Ako integrišemo posljednju jednakost po luku $Cl(\mathcal{O}_m)$, uzimajući u obzir da je

$$\int_{z_o}^{z} g^{(q)}(w)\,dw = g^{(q-1)}(z) - g^{(q-1)}(z_o) \qquad (z\in Cl(\mathcal{O}_m))$$

(integracija se vrši duž luka,sadržanog u $Cl(\mathcal{O}_m)$), dobijamo da za polinom $P_{q-1}(z) = \int P(z) + g^{(q-1)}(z_o)$, $z\in\mathbb{C}$, vrijedi

$$|P_{q-1}(z) - g^{(q-1)}(z)| < \varepsilon/2(2\pi)^{q-1} \qquad (z \in Cl(\sigma_m)).$$

Ponavljajući ovaj postupak dobijamo polinom P za koji vrijedi

$$|P(z) - g(z)| < \varepsilon/2 \qquad (z \in Cl(\sigma_m)).$$

Sada ćemo definisati funkciju f iz $A_q(z_o)$ za koju će vrijediti

$$\|f - g\|'_{m,q,z_o} < \varepsilon . \tag{3.6}$$

Pošto je funkcija g neprekidna na C postoje zatvoreni lukovi ℓ_1 i ℓ_2 koji u svojoj unutrašnjosti u C sadrže, respektivno, krajnje tačke α_1 i α_2 luka σ_m i za koje vrijedi

$$|g(z) - g(\alpha_i)| < \varepsilon/4 \qquad (z \in \ell_i),\ i=1,2 .$$

Neka je $\mathcal{U}$ neki otvoren (u $\mathbb{C}$) skup koji sadrži tačku z_o, $0 \notin Cl(\mathcal{U})$, i za koji vrijedi $Cl(\mathcal{U}) \cap C = Cl(\sigma_m)$. Stavljamo

$$f(z) = P(z) \qquad (z \in Cl(\mathcal{U})) \tag{3.7}$$

Sada ćemo definisati funkciju f na luku $\ell_1 \setminus Cl(\sigma_m)$. Neka je β_1 krajnja tačka luka ℓ_1 koja leži van luka $Cl(\sigma_m)$ i neka je $\beta_1 = \exp(it')$, $\alpha_1 = \exp(it'')$, $0 < t'' - t' < 2\pi$ i sve tačke oblika

$$\exp(i(\tau t' + (1 - \tau)t'')), \qquad \tau \in [0,1]$$

pripadaju luku ℓ_1. Tada stavljamo

$$f(\exp(i(\tau t' + (1-\tau)t''))) = \tau g(\exp(it')) + (1-\tau) f(\exp(it'')) \quad (\tau \in [0,1])$$

Analogno postupamo za luk $\ell_2 \setminus Cl(\sigma_m)$. Dalje stavljamo

$$f(z) = g(z) \qquad (z \in C \setminus (\ell_1 \cup \ell_2 \cup Cl(\sigma_m)))$$

Za ovako definisanu funkciju f jasno je da pripada prostoru $A(z_o)$ kao i prostoru $\mathcal{D}_{m,q}(z_o)$. Treba još dokazati da vrijedi (3.6). Prema konstrukciji polinoma P, za $z \in Cl(\sigma_m)$ je

$$|f^{(k)}(z) - g^{(k)}(z)| = |P^{(k)}(z) - g^{(k)}(z)| < \varepsilon/2 \qquad (0 \leq k \leq q),$$

Za $z \in \ell_1 \setminus Cl(\sigma_m)$ $(z = \exp(i(\tau t' + (1-\tau)t'')))$ je

$$\begin{aligned}
|f(z)-g(z)| &= |\tau g(\beta_1) + (1-\tau) f(\alpha_1) - g(z)| \leq \\
&\leq \tau |g(\beta_1) - g(z)| + (1-\tau)|P(\alpha_1) - g(z)| \leq \\
&\leq \tau \varepsilon/2 + (1-\tau)(|P(\alpha_1) - g(\alpha_1)| + |g(\alpha_1) - g(z)|) \leq \\
&\leq \tau \varepsilon/2 + (1-\tau)(\varepsilon/2 + \varepsilon/4) < \varepsilon
\end{aligned}$$

Analogno je za $\quad z \in \ell_2 \setminus Cl(\sigma_m)$

$$|f(z) - g(z)| < \varepsilon$$

Ovim je dokazano da vrijedi (3.6), a time i da je skup $A(z_o) \cap \mathcal{D}_{m,q}(z_o)$ gust u prostoru $\mathcal{D}_{m,q}(z_o)$. Pošto je topologija na prostoru $\mathcal{C}_q(z_o)$ slabija od topologije na $\mathcal{D}_{m,q}(z_o)$ odavde slijedi da je prostor $A(z_o)$ gust u prostoru $\mathcal{C}_q(z_o)$. Time je lema dokazana.

Sada ćemo dokazati da ako funkcija g pripada skupu $\mathcal{D}_{m,q}(z_o)$ onda i funkcija $\bar{g}$, definisana sa $\bar{g}(z) = \overline{g(\bar{z})}$ $(z \in C)$ pripada prostoru $\mathcal{D}_{m,q}(z_o)$ i postoji konstanta K nezavisna od funkcije g za koju vrijedi

$$\|\bar{g}\|'_{m,q,z_o} \leqslant K \|g\|'_{m,q,z_o} \qquad (g \in \mathcal{D}_{m,q}(z_o))$$

Najprije primijetimo da vrijedi

$$\bar{g}'(z) = -\overline{g'}(z)\,\bar{z}^2 \qquad (z \in Cl(\mathcal{O}_m))$$

Difercirajući gornju jednakost i uzimajući u obzir da je izvod funkcije $z \mapsto \bar{z}$ $(z \in C)$ u tački z jednak $-\bar{z}^2$ dobijamo da svaki od izvoda $\bar{g}^{(k)}$ $(0 < k \leqslant q)$ (definisanih na $Cl(\mathcal{O}_m)$) možemo izraziti kao konačnu linearnu kombinaciju funkcija $z \mapsto \overline{g^{(j)}}\,\bar{z}^{\gamma}$, $z \in Cl(\mathcal{O}_m)$, $0 < j \leqslant k \leqslant q$, $0 \leqslant \gamma \leqslant 2q$. Dakle postoji konstanta K, nezavisna od funkcije g tako da vrijedi

$$|\bar{g}^{(k)}(z)| \leqslant K \max_{0 < j \leqslant k} |g^{(j)}(z)| \qquad (z \in Cl(\mathcal{O}_m),\ 0 < k \leqslant q)$$

Odavde je očigledno da vrijedi gornja nejednakost za norme. U lemama 3.4 i 3.5 je dokazano da za proizvoljno $\varepsilon > 0$ postoji racionalna funkcija r sa polom u nuli za koju vrijedi

$$\|r - g\|'_{m,q,z_o} < \varepsilon$$

Na osnovu prethodnih razmatranja slijedi da racionalna funkcija r (za koju vrijedi $r^*(z) = \overline{r(\bar{z})}$, $z \in C$) aproksimira funkciju $\bar{g}$ sa tačnošću $K \cdot \varepsilon$. Drugim riječima ako niz racionalnih funkcija (r_k) konvergira u $\mathcal{D}_{m,q}(z_o)$ ka funkciji g onda niz (r_k^*) konvergira u $\mathcal{D}_{m,q}(z_o)$ ka funkciji $\bar{g}$. Ako je funkcija g realna na C onda niz racionalnih funkcija $(\frac{1}{2}(r_k^* + r_k))$ konvergira u prostoru $\mathcal{D}_{m,q}(z_o)$ ka funkciji g. Svaka od funkcija $\frac{1}{2}(r_k^* + r_k)$, k=1,2,... je realna na C.

Na osnovu lema 3.4. i 3.5. i prethodnih razmatranja vrijedi

TEOREM 3.6. Skup svih racionalnih funkcija (sa polom u nuli) je gust u prostoru $\mathcal{C}_q(z_o)$. Skup svih racionalnih funkcija (sa polom u nuli) koje su realne na C je gust u potprostoru realnih funkcija iz $\mathcal{C}_q(z_o)$.

U teoremu 3.6. zbog jednostavnosti razmatranja uzeli smo prostor $\mathcal{C}_q(z_o)$. Inače na potpuno analogan način se dokaže da je prostor racionalnih funkcija sa polom u nuli gust u prostoru

$$\mathcal{C}(z_j,q_j;\ j=1,\ldots,\nu):=\bigcap_{j=1}^{\nu}\mathcal{C}_{q_j}(z_j).$$

Na upravo definisanom prostoru topologija se zadaje analogno zadavanju topologije na $\mathcal{C}_q(z_o)$ i ovako zadana topologija podudara se sa najslabijom lokalno konveksnom topologijom na $\mathcal{C}(z_j,q_j;\ j=1,\ldots,\nu)$ koja je jača od topologije inducirane na prostor $\mathcal{C}(z_j,q_j;\ j=1,\ldots,\nu)$ sa prostora $\mathcal{C}_{q_j}(z_j)$ za sve $j=1,\ldots,\nu$. Ovo se lako vidi upoređujući lokalne baze za ove dvije vektorske topologije na prostoru $\mathcal{C}(z_j,q_j;\ j=1,\ldots,\ )$. U vezi sa gore korištenim topologijama na uniji, odnosno presjeku lokalno konveksnih topoloških vektorskih prostora vidjeti [11] §19 str.215.

Napomena. Na isti način kako je dokazan teorem 3.6. može se dokazati da je skup svih racionalnih funkcija sa polom u nuli gust u prostoru $\mathcal{F}(B)\cap\mathcal{C}(z_j,q_j;\ j=1,\ldots,\ )$ sa najslabijom lokalno konveksnom topologijom koja je jača od topologije uniformne konvergencije na B i već definisane topologije na $\mathcal{C}(z_j,q_j;\ j=1,\ldots,\ )$. Pri tome je B kompaktan podskup kompleksne ravni takav da se skup

$\mathbb{C}\setminus(C\cup B)$ sastoji od najviše dvije komponente od kojih jedna sadrži nulu, a druga je neograničena. Prilikom dokaza ove činjenice neznatne promjene bi nastale samo u dokazu leme 3.4.

TEOREM 3.7. Neka je U pozitibilan J-unitaran operator sa spektrom na jediničnoj kružnici C i neka je p pozitivirajući trigonometrijski polinom operatora U (iz teorema 3.3.) sa nulama $z_1,\dots,z_m$ koje leže na jediničnoj kružnici. Neka su $q_1,\dots,q_m$, respektivno višestrukosti ovih nula i $\sum q_j = 2n$. Tada postoji neprekidan homomorfizam

$$E:\ \mathcal{C}(z_j,q_j;\ j=1,\dots,m) \longrightarrow L(H)$$

sa sljedećim osobinama:

(i) $E(g) = g(U)$ za $g\in\mathcal{F}(U)\cap\mathcal{C}(z_j,q_j;\ j=1,\dots,m)$

(ii) $\mathrm{supp}(E) = \sigma(U)$ (definicija skupa $\mathrm{supp}(E)$ u dokazu),

(iii) vrijedi $E(g)^+ = E(g)$, $g\in\mathcal{C}(z_j,q_j;\ j=1,\dots,m)$, specijalno ako je g realna funkcija operator $E(g)$ je J-hermitski,

(iv) neka za g iz $\mathcal{C}(z_j,q_j;\ j=1,\dots,m)$ vrijedi

$$g(z)\,p(z) \geqslant 0 \qquad (g(z)\,p(z) \leqslant 0) \qquad (z\in C)$$

i neka je g/p ograničena funkcija. Tada vrijedi

$$[E(g)x,x] \geqslant 0 \qquad ([E(g)x,x] \leqslant 0) \qquad (x\in H).$$

Dokaz. Neka $\mathcal{R}$ označava skup svih racionalnih funkcija sa polom u nuli (tj. trigonometrijskih polinoma) iz jedinične sfere u normiranom prostoru

$$\mathcal{D}_k(z_j;q_j,\ j=1,\dots,m) = \bigcap_{j=1}^{m} \mathcal{D}_{k,q_j}(z_j), \quad k=1,2,\dots .$$

Za trigonometrijski polinom f stavimo da je $E(f):=f(U)$ Dokazaćemo da je skup $E(\mathcal{R})$ slabo ograničen u $L(H)$, pa je i ograničen u $L(H)$. Prije toga primijetimo da je, za proizvoljno $x \in H$ funkcional

$$\varphi \longmapsto [p(U)\,\varphi(U)x,x] ,$$

definisan za trigonometrijske polinome, pozitivan, pa dakle i neprekidan u uniformnoj konvergenciji na C. Stvarno, neka je φ trigonometrijski polinom i $\varphi(z) \geqslant 0$, $z \in C$. Tada su nule funkcije φ koje leže na C parne, neka su to $w_1,\dots,w_s$ i $2v_1,\dots,2v_s$ odgovarajuće višestrukosti. Vrijedi

$$\varphi(z) = \varphi_1(z) \prod_{j=1}^{s} (z - w_j)^{v_j} \left(\frac{1}{z} - \frac{1}{w_j}\right)^{v_j} \qquad (z \neq 0),$$

pri čemu je trigonometrijski polinom φ_1 strogo pozitivan na C, pa dakle i u nekoj okolini (u $\mathbb{C}$) skupa C. Na toj okolini (u $\mathbb{C}$) definisana je funkcija $\sqrt{\varphi_1}$ i pomoću Riesz-Dunfordovog funkcionalnog računa i operator $\varphi_1(U)^{1/2}$ koji je prema korolaru 1.33. J-hermitski. Dakle vrijedi

$$[p(U)\varphi(U)x,x] = \left[p(U)\,\varphi_1(U)\prod_{j=1}^{s}(U-w_jI)^{v_j}\,(U^{-1}-\bar{w}_jI)^{v_j}x,x\right] =$$

$$=\left[p(U)\varphi_1(U)^{1/2}\prod_{j=1}^{s}(U-w_jI)^{v_j}x,\varphi_1(U)^{1/2}\prod_{j=1}^{s}(U-w_jI)^{v_j}x\right]\geqslant 0$$

Tako je pozitivnost, pa i neprekidnost u uniformnoj konvergenciji na C, funkcionala $\varphi \longmapsto [p(U)\,\varphi(U)x,x]$ dokazana.

Naš trigonometrijski polinom p je oblika $\sum_{j=-n}^{n} a_j z^j$. Lako se vidi, analogno kao u slučaju običnih polinoma, [13] I-6.9. str.138, da se svaki trigonometrijski polinom f može napisati u obliku

$$f(z) = p(z)\,h(z;f) + g(z;f) \qquad (z \neq 0) \qquad (3.8)$$

pri čemu su $h(\cdot,f)$ i $g(\cdot;f)$ trigonometrijski polinomi, trigonometrijski polinom $g(\cdot;f)$ ima oblik $\sum_{j=-n}^{n-1} b_j z^j$, gdje koeficijenti $b_j(j=-n,\dots,-1,0,1,\dots,n-1)$ zavise od funkcije f. Trigonometrijski polinom $g(\cdot;f)$ ovog oblika određen je jednoznačno sa f. Vrijedi

$$p^{(k)}(z_j) = 0 \qquad (k=0,1,\dots,q_j-1,\quad j=1,2,\dots,m).$$

Diferencirajući jednakost (3.8) i koristeći ovo dobijamo da je

$$f^{(k)}(z_j) = g^{(k)}(z_j,f) \qquad (k=0,1,\dots,q_j-1,\ j=1,\dots,m) \qquad (3.9)$$

Pošto za fiksiran trigonometrijski polinom f postoji jedinstven trigonometrijski polinom $g(\cdot,f)$ koji zadovoljava (3.8) i ima dati oblik sistem linearnih jednačina (3.9) sa nepoznatim koeficijentima trigonometrijskog polinoma $g(\cdot,f)$ ima jedinstveno rješenje. Determinanta ovog sistema je nezavisna od funkcije f i različita od nule, neka je jednaka $d(\neq 0)$, Neka je sada trigonometrijski polinom f uzet iz skupa $\mathcal{R}$, trenutno nam treba samo da je

$$\left|f^{(k)}(z_j)\right| \leqslant 1 \qquad (k=0,1,\dots,q_j-1,\quad j=1,2,\dots m).$$

Napomenimo da nijedan od članova u determinanti sistema (3.9) nije veći od $(3n)!$. Sada rješavamo sistem (3.9) pomoću Cramerovog pravila. Označimo determinantu koja se javlja prilikom računanja koeficijenta $b_s(f)$ $(s=-n,\dots,-1,0,1,\dots,n-1)$ polinoma $g(\cdot,f)$ sa $d_s(f)$. Jasno je da vrijedi

$$|d_s(f)| \leq n!((3n)!)^{n-1} \qquad (f \in \mathcal{R})$$

Dakle koeficijenti trigonometrijskih polinoma $g(\cdot,f)$, $f \in \mathcal{R}$ su uniformno ograničeni (sa $n!((3n)!)^{n-1}/|d|$). Gornju procjenu mogli bi dobiti i puno tačnije ali nama je važna uniformna ograničenost koeficijenata trigonometrijskih polinoma $g(\cdot,f)$, $f \in \mathcal{R}$.

Dokažimo da su i funkcije $h(\cdot,f)$, $f \in \mathcal{R}$ uniformno ograničene na C. Za svaku tačku z_j fiksirajmo jednu njenu zatvorenu povezanu okolinu ϑ_j(u C) manju od pola kružnice za koju je $\vartheta_j \cap \{z_1,\ldots z_m\} = \{z_j\}$ i na kojoj je

$$\left|f^{(k)}(z)\right| \leq 1 \quad (k=0,1,\ldots,q_j, \quad z \in \vartheta_j, \quad j=1,2,\ldots,m, \quad f \in \mathcal{R})$$

Jasno je da su funkcije

$$h(z,f) = \frac{f(z) - g(z,f)}{p(z)} \qquad (f \in \mathcal{R})$$

uniformno ograničene na $C \setminus (\cup \vartheta_j)$. Ispitajmo ponašanje funkcija $h(\cdot,f)$, $f \in \mathcal{R}$ na okolinama ϑ_j, $j=1,\ldots,m$. Vrijedi

$$p(z) = (z - z_j)^{q_j}\, p_j(z), \quad p_j(z) \neq 0 \quad (z \in \vartheta_j, \ j=1,\ldots,m).$$

Sada je

$$h(z,f) = \frac{f(z) - g(z,f)}{(z - z_j)^{q_j}} \, \frac{1}{p_j(z)} \qquad (z \in \vartheta_j, \quad j=1,\ldots,m).$$

Funkcija $u(z,f) = f(z) - g(z,f)$, $z \in C$, $f \in \mathcal{R}$ ima u tački z_j nulu reda q_j, $j=1,\ldots,m$ i ove funkcije, kao i svi njihovi izvodi do reda q_j su uniformno ograničeni na ϑ_j, tj. postoji $K>0$ takvo da je

$$|u^{(k)}(z,f)| < K \quad (z \in \vartheta_j,\ k=0,1,\dots,q_j,\ j=1,\dots,m,\ f \in \mathcal{R})$$

Ovo vrijedi jer smo pogodno odabrali okoline ϑ_j, $j=1,\dots,m$ i jer triginometrijski polinomi $g(\cdot,f)$, $f \in \mathcal{R}$ imaju uniformno ograničene koeficijente. Dokažimo da su uniformno ograničene na ϑ_j i funkcije $u(\cdot,f)/(\cdot-z_j)^{q_j}$, $f \in \mathcal{R}$, $j=1,\dots,m$. Vrijedi

$$|u^{(q_j-1)}(z,f)| = \left|\int_{z_j}^{z} u^{(q_j)}(w,f)dw\right| \leqslant \int_{z_j}^{z} K|dw| = \int_{t_j}^{t} Kdx = K|t-t_j| \leqslant K\frac{\pi}{2}|z-z_j|$$

pri čemu je $z \in \vartheta_j$, $z=e^{it}$, $z_j=e^{it_j}$, $w=e^{ix}$, $|t-t_j| < \pi$, $j=1,\dots,m$, $f \in \mathcal{R}$. Slično

$$|u^{(q_j-2)}(z,f)| = \left|\int_{z_j}^{z} u^{(q_j-1)}(w,f)dw\right| \leqslant \int_{t_j}^{t} K|x-t_j|\,dx = K\frac{|t-t_j|^2}{2} \leqslant K\left(\frac{\pi}{2}\right)^2 \frac{|z-z_j|^2}{2}$$

Nastavljajući ovaj proces dalje dobili bi da je

$$|u(z,f)| \leqslant K\left(\frac{\pi}{2}\right)^{q_j} \frac{|z-z_j|^{q_j}}{q_j!} \quad (z \in \vartheta_j,\ j=1,\dots,m,\ f \in \mathcal{R})$$

Odavde odmah slijedi da je

$$\left|\frac{u(z,f)}{(z-z_j)^{q_j}}\right| \leqslant K\left(\frac{\pi}{2}\right)^{q_j} \leqslant K\left(\frac{\pi}{2}\right)^{2n} \quad (z \in \vartheta_j,\ j=1,\dots,m,\ f \in \mathcal{R})$$

Dakle

$$|h(z,f)| \leqslant K\left(\frac{\pi}{2}\right)^{2n} \sup\left\{\frac{1}{p_j(w)},\ w \in \vartheta_j\right\} \quad (z \in \vartheta_j,\ j=1,2,\dots m, f \in \mathcal{R}).$$

Ovim je dokazana uniformna ograničenost na C familije funkcija $h(\cdot,f), f \in \mathcal{R}$. Zbog neprekidnosti funkcionala o kome je bilo riječi na početku ovog dokaza skup $\{[p(U)h(u,f)x,x]\ ;\ f \in \mathcal{R}\}$ je ograničen za svako x iz H. Također je ograničen skup operatora $\{g(U,f);\ f \in \mathcal{R}\}$ jer su koeficijenti trigonometrijskih polinoma $g(\cdot,f)$, $f \in \mathcal{R}$

uniformno ograničeni, a u izrazu za $g(U,f)$ javljaju se samo ograničeni operatori U^j, $j=-n,\dots,-1,0,1,\dots,n-1$. Pomoću jednakosti (3.8) zaključujemo da je skup $\{[f(U)x,x], f\in\mathcal{R}\}$ ograničen za svako x iz H, a odatle lako slijedi da je skup $\{f(U), f\in\mathcal{R}\}=E(\mathcal{R})$ slabo ograničen, pa i ograničen u $L(H)$. Ovim je dokazano da je E neprekidan homomorfizam prostora trigonometrijskih polinoma sa normom iz $\mathcal{D}_k(z_j,q_j;\ j=1,\dots,m)$ u prostor $(L(H), \|\cdot\|)$, $k=1,2,\dots$. Na osnovu definicije topologije na $\mathcal{C}(z_j,q_j;\ j=1,\dots,m)$ odavde slijedi da je homomorfizam E neprekidan i u odnosu na topologiju induciranu na prostor trigonometrijskih polinoma iz $\mathcal{C}(z_j,q_j;\ j=1,\dots,m)$. Pošto je prostor $(L(H), \|\cdot\|)$ kompletan, a prostor trigonometrijskih polinoma gust u prostoru $\mathcal{C}(z_j,q_j;\ j=1,\dots,m)$ (teorem 3.6) homomorfizam E možemo neprekidno produžiti na cijeli prostor $\mathcal{C}(z_j,q_j;\ j=1,\dots,m)$. Dokažimo da ovaj homomorfizam ima osobine (i) - (iv).

(i) Neka je g funkcija iz $\mathcal{F}(U)\cap\mathcal{C}(z_j,q_j;j=1,\dots,m)$ i neka je $\mathcal{U}$ okolina spektra $\sigma(U)$ za koju je skup $Cl(\mathcal{U})$ kompaktan i ne sadrži nulu i skup $\mathbb{C}\setminus(Cl(\mathcal{U})\cup C)$ sastoji se od najviše dvije komponente od kojih jedna sadrži nulu, a druga je neograničena. Prema napomeni prije teorema 3.7. postoji niz trigonometrijskih polinoma (r_k) koji konvergira ka funkciji g uniformno na $Cl(\mathcal{U})$ i u topologiji prostora $\mathcal{C}(z_j,q_j;\ j=1,\dots,m)$. Prema teoremu 9.6.[12] vrijedi $g(U) = \lim r_k(U)$, a prema definiciji homomorfizma E je $E(g) = \lim E(r_k)$. Kako je po definiciji $r_k(U) = E(r_k)$, $k=1,2,\dots$ odavde dobijamo da je $E(g) = g(U)$.

(ii) Definišimo najprije nosač homomorfizma E. Za homomorfizam E kažemo da se poništava na otvorenom skupu $\mathcal{O}\subseteq C$ ako je $E(g) = 0$ za svaku funkciju g iz $\mathcal{C}(z_j,q_j;\ j=1,\dots,m)$ koja se poništava van skupa $\mathcal{O}$.

<u>Nosač</u> homomorfizma E (oznaka $\mathrm{supp}(E)$) je zatvorenje komplementa (u odnosu na C) unije svih skupova na kojima se E poništava.

Dokažimo da je $\mathrm{supp}(E) = \sigma(U)$. Neka je $\mathcal{U}$ proizvoljan pravi otvoren podskup skupa $\rho(U)$ i g funkcija iz $\mathcal{C}(z_j,q_j;\ j=1,\dots,m)$ koja se poništava van skupa $\mathcal{U}$. Funkcija g se poništava na nekoj okolini u C skupa $\sigma(U)$, pa se može analitički produžiti na neku okolinu u $\mathbb{C}$ skupa $\sigma(U)$, tako da se i na njoj poništava. Prema (i) vrijedi $E(g) = g(U) = 0$. Dakle homomorfizam E poništava se na skupu $\mathcal{U}$. Odavde slijedi da je $\mathrm{supp}(E) \subseteq \sigma(U)$. Da bi dokazali i obrnutu inkluziju uzmimo $z_o \in C \setminus \mathrm{supp}(E)$. Neka je ℓ_o otvoren luk koji sadrži tačku z_o, čije je zatvorenje sadržano u skupu $C\setminus\mathrm{supp}(E)$ i čije krajnje tačke ne pripadaju skupu $\{z_1,\dots,z_m\}$. Definišimo funkciju g da bude jednaka funkciji $(\cdot - z_o\ )^{-1}$ van luka ℓ_o i linearna na luku ℓ_o. Na osnovu ove definicije jasno je da funkcija g pripada prostoru $\mathcal{C}(z_j,q_j;\ j=1,\dots,m)$ i da se funkcija $g\,(\cdot - z_o) - 1$ poništava na okolini $C\setminus\ell_o$ skupa $\mathrm{supp}(E)$. Dakle vrijedi

$$E(g)\,E((\cdot - z_o)) = E((\cdot - z_o))E(g) = I$$

tj. $E(g) = (U - z_o I)^{-1}$. Dakle $z_o \in \rho(U)$ tj. $\sigma(U) \subseteq \mathrm{supp}(E)$. Tako je dokazano da je $\mathrm{supp}(E) = \sigma(U)$.

(iii) Neka je (r_k) niz trigonometrijskih polinoma koji u prostoru $\mathcal{C}(z_j,q_j;\ j=1,\dots,m)$ konvergira ka g. Prema razmatranjima koja su prethodila teoremu 3.6. niz trigonometrijskih polinoma (r_k^*) konvergira ka funkciji $\bar{g}$, a na osnovu propozicije 1.32. vrijedi

$$r_k^*(U) = r_k(U)^+ \qquad (k=1,2,\dots)$$

Sada imamo da je, za proizvoljne x,y iz H,

$$[E(g)x,y] = \lim [r_k(U)x,y] = \lim [x,r_k^*(U)y] =$$
$$= [x,E(\bar{g})y]$$

Dakle $E(g)^+ = E(\bar{g})$, $g \in \mathcal{C}(z_j,q_j;\ j=1,\dots,m)$.

(iv) Pod uslovima iz (iv) slijedi da je g/p nenegativna ograničena funkcija iz $\mathcal{C}(z_j,q_j;\ j=1,\dots,m)$, pa postoji niz trigonometrijskih polinoma (r_k) koji konvergira ka funkciji g/p u $\mathcal{C}(z_j,q_j;\ j=1,\dots,m)$. Trigonometrijski polinomi r_k, $k=1,2,\dots$ mogu se odabrati tako da svi budu pozitivni na C. Kao što je pokazano na početku dokaza ovog teorema za funkcije r_k, $k=1,2,\dots$ i proizvoljno x iz H vrijedi $[p(U)r_k(U)x,x] \geqslant 0$. Pošto niz (r_k) konvergira funkciji g/p niz $(r_k\, p)$ konvergira funkciji g. Dakle vrijedi

$$[E(g)x,x] = \lim [E(r_k p)x,x] = \lim [p(U)r_k(U)x,x] \geqslant 0 \quad (x \in H)$$

Ovim je dokazana tvrdnja (iv) i dokaz teorema je završen.

Sada ćemo homomorfizam E iz prethodnog teorema produžiti na skup ograničenih funkcija definisanih na C koje se mogu predstaviti kao limes po tačkama niza neprekidnih funkcija i koje u okolini (u C), zavisnoj od funkcije, tačke z_j imaju neprekidne izvode reda $\leqslant q_j$, $j=1,\dots,m$ (tj. na skup ograničenih funkcija Baireove prve klase definisanih na C koje u nekoj okolini tačke z_j imaju neprekidne izvode reda $\leqslant q_j$). Prvo produžimo homomorfizam E na ograničene funkcije Baireove prve klase na C koje se poništavaju na nekoj okolini (u C), koja zavisi od funkcije, skupa $N(p)$. Neka je f jedna takva funkcija, neka je $\mathcal{O}' \subseteq C$ otvorena okolina skupa $N(p)$ na kojoj se ona poništava i $f(z) = \lim f_k(z)$, $z \in C$, pri čemu su funkcije f_k iz $\mathcal{C}(z_j,q_j;\ j=1,\dots,m)$ i funkcija f_k, $k=1,2,\dots$ se poništava na otvorenoj okolini $\mathcal{O} \subseteq \mathcal{O}'$ skupa $N(p)$. Funkcije f_k, $k=1,2,\ldots$ možemo odabrati tako da budu uniformno ograničene na C. Za proizvoljnu kompleksnu regularnu Borelovu mjeru μ na $C \setminus \mathcal{O}$ vrijedi $\int f d\mu = \lim \int f_k d\mu$. Prema Rieszovom teoremu reprezentacije (teorem 6.19. str131 [21]) odavde slijedi da je niz (f_k) slabo Cauchyjev niz u prostoru $\mathcal{C}(C \setminus \mathcal{O})$ neprekidnih funkcija definisanih na C koje se poništavaju na skupu $\mathcal{O}$, sa topologijom uniformne konvergencije koja je određena normom $\|g\| = \sup\{|g(z)|, z \in C \setminus \mathcal{O}\}$, $g \in \mathcal{C}(C \setminus \mathcal{O})$. Za proizvoljne x i y iz H preslikavanje

$$g \longmapsto [E(g)x,y] \qquad (g \in \mathcal{C}(C \setminus \mathcal{O}))$$

je neprekidan linearan funkcional na prostoru $(\mathcal{C}(C \setminus \mathcal{O}), \|\cdot\|)$. Ovo je posljedica činjenice da je $(\mathcal{C}(C \setminus \mathcal{O}), \|\cdot\|) \subseteq \mathcal{D}_\nu(z_j,q_j;\ j=1,\ldots,m)$, za neko $\nu \in \{1,2,\ldots\}$ i da je homomorfizam E neprekidan na $\mathcal{D}_\nu(z_j,q_j;\ j=1,\ldots,m)$. Pošto je niz (f_k) slabo Cauchyjev na prostoru $(\mathcal{C}(C \setminus \mathcal{O}), \|\cdot\|)$ odavde slijedi da je za proizvoljne x i y iz H niz $([E(f_k)x,y])$ Cauchyjev, pa je niz $(E(f_k))$ slabo Cauchyjev u prostoru $(L(H), \|\cdot\|)$. Kako je prostor $L(H)$ nizovno slabo kompletan, niz $(E(f_k))$ je slabo konvergentan i stavljamo, po definiciji

$$E(f) := \lim E(f_k).$$

Posljednja definicija ne zavisi od izbora niza (f_k), jer ako je (g_k) niz sa osobinama kao i niz (f_k) onda je niz $(g_k - f_k)$ slabo konvergentan ka nuli pa je $\lim[E(g_k)x,y] = \lim[E(f_k)x,y]$ $(x,y \in H)$. Neka je f sada proizvoljna ograničena funkcija Baireove prve klase definisana na C koja u okolini (u C) $\mathcal{O}_j$

tačke z_j ima neprekidne izvode reda $\leqslant q_j$, $j=1,\dots,m$. Definišimo funkciju $\hat{f}$ da bude jednaka f na skupu $\cup\{\mathcal{O}_j;\ j=1,\dots,m\}$ i neprekidna na C. Funkcija $\hat{f}$ pripada prostoru $\mathcal{C}(z_j,q_j;\ j=1,\dots,m)$ i funkcija $f-\hat{f}$ je ograničena funkcija Baireove prve klase koja se poništava na nekoj okolini skupa $N(p)$. Dakle definisano je i $E(f-\hat{f})$ i $E(\hat{f})$ pa stavljamo

$$E(f) = E(f-\hat{f}) + E(\hat{f})$$

Ova definicija je nezavisna od izbora funkcije f, jer ako je $\tilde{f}$ neka druga funkcija sa osobinama kao i $\hat{f}$ onda zbog $f-\hat{f} = f-\tilde{f}+\tilde{f}-\hat{f}$ i zbog linearnosti preslikavanja E imamo da je

$$E(f-\hat{f}) + E(\hat{f}) = E(f-\tilde{f}) + E(\tilde{f}).$$

Ovako prošireno preslikavanje E ostaje homomorfizam i ima osobine analogne sa (iii) i (iv) iz teorema 3.7.

Dokažimo tvrdnju analognu sa (iii). Neka je f ograničena funkcija Baireove prve klase na C koja se poništava u nekoj okolini (u C) skupa $N(p)$ i $f(z)=\lim f_k(z)$, $z\in C$, Tada je za proizvoljne $x,y\in H$

$$[E(f)x,y] = \lim[E(f_n)x,y] = \lim[x,E(\bar{f}_n)y] = [x,E(\bar{f})y]$$

jer je očigledno da je $\lim \bar{f}_k(z) = \bar{f}(z)$, $z\in C$. Dakle $E(f)^+ = E(\bar{f})$. Ista jednakost se lako dobija i za opštiji slučaj funkcije f.

Dokažimo sada i tvrdnju analognu sa (iv). Neka je f ograničena funkcija Baireove prve klase na C koja u nekoj okolini $\mathcal{O}_j$ tačke z_j ima neprekidne izvode reda $\leqslant q_j$, $j=1,\dots,m$ i vrijedi $f(z)p(z) \geqslant 0$ $(z \in C)$ i funkcija f/p je ograničena na C. Tada je f/p nenegativna funkcija Baireove prve klase i ima neprekidne izvode gdje i funkcija f. Neka je $\hat{g}$ nenegativna funkcija iz $\mathcal{C}(z_j, q_j;\ j=1,\dots,m)$ koja se podudara sa funkcijom f/p na skupu $\bigcup \{\mathcal{O}_j;\ j=1,\dots,m\}$ i (g_k) niz nenegativnih funkcija iz $\mathcal{C}(z_j, q_j;\ j=1,\dots,m)$ koje se poništavaju na $\bigcup \{\mathcal{O}_j;\ j=1,\dots,m\}$ i $\lim g_k(z) = f(z)/p(z) - \hat{g}(z)$, $z \in C$

Tada je :

$$E(f) = E(f/p)\, p(U) = \lim E(g_k)\, p(U) + E(\hat{g})p(U).$$

Na osnovu tvrdnje (iv) teorema 3.7. vrijedi

$$[E(g_k)\, p(U)x, x] \geqslant 0 \quad \text{i} \quad [E(\hat{g})\, p(U)x, x] \geqslant 0 \quad (x \in H),$$

jer su funkcije $\hat{g}$ i g_k , $k=1,2,\dots$ nenegativne na C. Iz posljednje tri relacije slijedi tvrdnja koju dokazujemo.

Koristeći činjenicu da se skup svih Baireovih funkcija na C poklapa sa skupom funkcija koje su izmjerive u Borelovom smislu na C ([24] str.367-8) produžavajući ovaj proces transfinitnom indukcijom možemo definisati homomorfizam E na skupu svih ograničenih funkcija koje su izmjerive u Borelovom smislu na C i koje u okolini tačke z_j imaju neprekidne izvode reda $\leqslant q_j$, $j=1,\dots,m$.

Specijalno, svaka karakteristična funkcija χ_Δ, skupa Δ iz algebre $\mathcal{A}(C \setminus N(p))$ (definicija na početku dijela II.) je funkcija Baireove prve klase i ima izvode svih redova na nekoj okolini skupa $N(p)$.

Po definiciji stavljamo:

$$E(\Delta) := E(\chi_\Delta) \qquad (\Delta \in \mathcal{A}(C \setminus N(p))).$$

Na osnovu osobine (iii) iz teorema 3.7., odnosno odgovarajuće analogne osobine $\chi_\Delta^2 = \chi_\Delta$ operator $E(\Delta)$ je J-hermitski projektor. Na osnovu osobine homomorfizma E analogne sa (iv) vrijedi

$$[E(\Delta)x,x] \geq 0 \quad (x \in H), \text{ ako je } p(z) > 0 \text{ za } z \in \Delta, \; (\Delta \in \mathcal{A}(C \setminus N(p))) \tag{3.10}$$

i

$$[E(\Delta)x,x] \leq 0 \quad (x \in H), \text{ ako je } p(z) < 0 \text{ za } z \in \Delta, \; (\Delta \in \mathcal{A}(C \setminus N(p))) \tag{3.10'}$$

Stvarno, pošto $\Delta \in \mathcal{A}(C \setminus N(p))$ vrijedi $p(z) > 0$ (resp. $p(z) < 0$) za $z \in Cl(\Delta)$, pa je funkcija χ_Δ / p ograničena nenegativna (resp. nepozitivna) funkcija na C, tj. funkcija χ_Δ zadovoljava uslove tvrdnje (iv). Prema propoziciji 1.22. potprostor $E(\Delta)H$ prostora H je J-ortogonalno dopunjiv, pa na osnovu korolara 1.17. relacija (3.10) (resp. (3.10')) povlači da je potprostor $E(\Delta)H$ uniformno pozitivan (resp. negativan), tj. da je prostor $(E(\Delta)H, [\cdot,\cdot])$ (resp. $(E(\Delta)H, -[\cdot,\cdot])$) Hilbertov prostor, za skup Δ iz $\mathcal{A}(C \setminus N(p))$ iz relacije (3.10) (resp. (3.10')). Ova činjenica će nam biti važna u sljedećoj lemi.

Neka su p_1 i p_2 dva pozitivirajuća trigonometrijska polinoma J-unitarnog operatora U i E_1 i E_2 ovim polinomima odgovarajući homomorfizmi konstruisani u teoremu 3.7. i razmatranjima poslije njega. Na osnovu te konstrukcije jasno je da se homomorfizmi E_1 i E_2 podudaraju na presjeku njihovih domena, tj. za ograničene funkcije Baireove prve klase na C koje u nekoj okolini tačke z_{jk} imaju neprekidne izvode reda $\leqslant q_{jk}$, gdje je q_{jk} višestrukost nule z_{jk} polinoma p_k, $j=1,\dots,m_k$, $k=1,2$. Na osnovu ovoga sljedeća definicija ne zavisi od izbora pozitivirajućeg trigonometrijskog polinoma.

Tačka z iz skupa $\sigma(U)$ naziva se <u>kritična tačka</u> pozitibilnog J-unitarnog operatora U ako je za sve povezane otvorene okoline $\Delta \subseteq C$ tačke z, čije krajnje tačke ne leže u skupu $N(p)$, potprostor $E(\Delta)H$ indefinitan. Skup svih kritičnih tačaka operatora U označavemo sa $c(U)$.

S obzirom na (3.10) i (3.10′) očigledno je da je

$$c(U) \subseteq N(p) \cap \sigma(U)$$

za svaki pozitivirajući trigonometrijski polinom p J-unitarnog operatora U. Štaviše vrijedi i:

LEMA 3.8. Neka je U pozitibilan J-unitaran operator čiji spektar leži na jediničnoj kružnici. Tada postoji pozitivirajući trigonometrijski polinom p_o operatora U čije nule leže na jediničnoj kružnici i vrijedi

$$c(U) = N(p_o) \cap \sigma(U). \tag{3.11}$$

Dokaz. Prema teoremu 3.3. postoji pozitivirajući trigonometrijski polinom p operatora U koji je realan na C i $N(p) \subseteq C$. Pretpostavimo da je $z_o \in C$ nula trigonometrijskog polinoma p koja ne pripada skupu $c(U)$. Neka je Δ otvoren (u C) luk manji od pola kružnice, $\Delta \in \mathcal{A}(C \setminus N(p))$, $\Delta \cap N(p) = \{z_o\}$ i neka je $E(\Delta)H$ pozitivan ili negativan potprostor. Možemo pretpostaviti da je $E(\Delta)H$ pozitivan potprostor jer se u suprotnom slučaju sva razmatranja provode analogno. Napomenimo da je $(E(\Delta)H,[\cdot,\cdot])$ Hilbertov prostor i da je restrikcija $U|E(\Delta)H$ operatora U na potprostor $E(\Delta)H$ unitaran operator na ovom Hilbertovom prostoru.

Neka je z_o nula parnog reda $2k$ trigonometrijskog polinoma p i neka je trigonometrijski polinom p nenegativan na Δ. Vidjećemo da je u ovom slučaju trigonometrijski polinom

$$p_1(z):= (z - z_o)^{-k} \left(\frac{1}{z} - \frac{1}{z_o} \right)^{-k} p(z) \qquad (z \neq 0)$$

pozitivirajući trigonometrijski polinom operatora U. Stvarno, neka je f funkcija iz $\mathscr{C}(z_j,q_j;\ j=1,\dots,m)$, z_j, $j=1,\dots,m$ su sve nule trigonometrijskog polinoma p, a q_j, $j=1,\dots,m$ odgovarajuće višestrukosti, $0 \leq f(z) \leq 1$, $z \in C$ i neka se funkcija f poništava na nekoj okolini tačke z_o, a jednaka je 1 na nekoj okolini skupa $C \setminus \Delta$. Jasno je da funkcija $p_1 f$ zadovoljava uslove tvrdnje (iv) iz teorema 3.7. pa vrijedi

$$[p_1(U)E(f)x,x] \geq 0 \qquad (x \in H).$$

Pošto je restrikcija $U|E(\Delta)H$ unitaran operator na Hilbertovom prostoru $(E(\Delta)H,[\cdot,\cdot])$, a funkcija $p_1(1 - f)$ je nenegativna na C operator $p_1(U|E(\Delta)H)(I - f(U|E(\Delta)H))$ je pozitivan na Hilbertovom prostoru $(E(\Delta)H,[\cdot,\cdot])$. Iz definicije homomorfizma E je očigledno da je

$$p_1(U|E(\Delta)H)(I - f(U|E(\Delta)H)) = p_1(U)(I - E(f))\, E(\Delta)$$

Pošto je $(I-E(f))\,(I-E(\Delta))=E((1-f)(1-\chi_\Delta))=E(0)=0$ dobijamo da vrijedi

$$[p_1(U)(I - E(f))x,x] \geq 0 \qquad (x \in H)$$

Zajedno sa posljednjom nejednakošću ovo daje

$$[p_1(U)x,x] \geqslant 0 \qquad (x \in H).$$

Pretpostavimo sada ponovo da je z_0 nula trigonometrijskog polinoma p parnog reda 2k ali da je p nepozitivan na Δ. Tada za svaki luk Δ_1 sadržan u luku Δ, $z_0 \notin \Delta_1$ vrijedi $p(z) < 0$ $(z \in \Delta_1)$. Zbog toga je $E(\Delta_1)H$ negativan potprostor, sadržan u pozitivnom potprostoru $E(\Delta)H$. Dakle $E(\Delta_1)H = \{0\}$, tj. $\Delta_1 \subseteq C \setminus supp(E) = \rho(U)$. Tako imamo da je $\Delta \cap \sigma(U) = \{z_0\}$. Izaberimo tačke z' i $z'' \in \Delta \setminus \{z_0\}$ tako da one leže u raznim komponentama skupa $\Delta \setminus \{z_0\}$ i za ovaj slučaj definišimo

$$p_1(z) := p(z)\,(z-z_0)^{-k}\left(\frac{1}{z} - \frac{1}{z_0}\right)^{-k}(z-z')\left(\frac{1}{z} - \frac{1}{z''}\right)\left(1 + \frac{z''}{z'}\right)$$

Funkcija p_1 je nenegativna na luku Δ_0, koji je ograničen tačkama z' i z'' a sadrži tačku z_0, pa na isti način kao u prethodnom dijelu dokaza, zamjenjujući luk Δ sa lukom Δ_0 dobijamo da je

$$[p_1(U)x,x] \geqslant 0 \qquad (x \in H)$$

Neka je sada z_0 nula reda $2k+1$ trigonometrijskog polinoma p. Kao i malopřije imamo da je $\{z \in \Delta : p(z) < 0\} \subseteq \rho(U)$. Pretposljednji skup nije prazan jer trigonometrijski polinom p mijenja znak na Δ. Uzmimo sada $z' \in \Delta$, $p(z') < 0$. Za ovaj slučaj definišimo:

$$p_1(z) := p(z)(z - z_0)^{-(k+1)}\left(\frac{1}{z} - \frac{1}{z_0}\right)^{-k}(z - z')\left(1 + \frac{z_0}{z'}\right)$$

Trigonometrijski polinom p_1 je nenegativan na dijelu luka koji je ograničen sa tačkom z' i sadrži tačku z_0. Označimo li ovaj luk sa Δ' i postupajući kao u prvom dijelu dokaza uzimajući umjesto luka Δ luk Δ' dobili bi da je i u ovom slučaju

$$[p_1(U)x,x] \geqslant 0 \qquad (x \in H)$$

U sva tri slučaja za pozitivirajući polinom p_1 operatora U imamo da je

$$N(p_1) \cap \sigma(U) = (N(p) \cap \sigma(U)) \setminus \{z_o\}.$$

Provodeći ovaj proces za sve tačke iz $(N(p) \cap \sigma(U)) \setminus c(U)$ (ima ih konačan broj) dobijamo trigonometrijski polinom p_o koji je pozitivirajući trigonometrijski polinom operatora U i za koji vrijedi

$$N(p_o) \cap \sigma(U) = c(U).$$

Ovim je lema dokazana.

U dokazu prethodne leme nije posebno naglašeno da u sva tri slučaja trigonometrijski polinom p_1 ima osobinu $p_1(z^*) = \overline{p_1(z)}$, $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$, koju prema jednoj ranijoj napomeni smatramo obaveznom za pozitivirajuće funkcije J-unitarnih operatora. Takođe nije posebno dokazivana nenegativnost polinoma p_1 na odgovarajućim lukovima. Za dokaz te činjenice, u drugom i trećem slučaju, koristi se izbor tačaka z' i z'', odnosno z' i sljedeća jednostavna činjenica: Za tačke $z' = \exp(it')$, $z'' = \exp(it'')$, $0 < t' - t'' < \pi$ funkcija

$z \longmapsto (z - z')\left(\frac{1}{z} - \frac{1}{z''}\right)\left(1 + \frac{z''}{z'}\right)$ je nepozitivna na luku

$\ell := \{\exp(it) \colon t'' \leq t \leq t'\}$. Stvarno, stavimo $t_o = \frac{1}{2}(t' + t'')$, $\varphi_o = \frac{1}{2}(t' - t'')$ $(< \frac{\pi}{2})$. Tada je $z' + z'' = 2\cos\varphi_o$ i svako $z \in \ell$ može se napisati u obliku $z = \exp(i(t_o + \varepsilon))$,

$|\varepsilon| \in [0, \varphi_0]$. Sa ovim je

$$(z-z')\left(\frac{1}{z} - \frac{1}{z''}\right)\left(1+ \frac{z''}{z'}\right) = (zz''- z'z''-z^2+zz')\bar{z}\overline{(z''+ z')} =$$

$$= (z(z''+z') -z^2 -z'z'')\bar{z}\overline{(z''+ z')} =$$

$$= |z''+z'|^2-(z\overline{(z''+z')}+\bar{z}(z''+z'))=|z''+z'|^2-2\mathrm{Re}\; z(\overline{z''}+\overline{z'}) =$$

$$= |z'+z''|^2-2\mathrm{Re}(\exp(i(t_0+\varepsilon))\,|z'+z''|\,\exp(-it_0)) =$$

$$= |z'+z''|\,(2\cos\varphi_0-2\cos\varepsilon)\leqslant 0, \qquad (\varepsilon \in [0, \varphi_0],\ \varphi_0<\tfrac{\pi}{2}).$$

Za pozitivirajući triginometrijski polinom p_0 iz leme 3.8. u opštem slučaju ne vrijedi $N(p_0) = c(U)$, međutim homomorfizam E iz teorema 3.7. sa prostora $\mathscr{C}(z_j,q_j;\ j=1,\dots,m)$ (z_j su nule pozitivirajućeg trigonometrijskog polinoma p_0, $z_j\in C$, q_j, $j=1,\dots,m$ su odgovarajuće višestrukosti) možemo produžiti na prostor svih kompleksnih funkcija koje su neprekidne na nekoj okolini (u C i okolina zavisi od konkretne funkcije) skupa $\sigma(U)$ i u okolinama tačaka $z_j \in \sigma(U)$ imaju neprekidne izvode reda $\leqslant q_j$, $j\in\{1,\dots,m\}$., Ovakve funkcije f možemo, naime, neprekidno produžiti na C do funkcije $\hat{f}$, tako da $\hat{f} \in \mathscr{C}(z_j,q_j;\ j=1,\dots,m)$. Sada definišemo $E(f):= E(\hat{f})$. Ova definicija je nezavisna od izbora funkcije $\hat{f}$, jer ako su $\hat{f}_1$ i $\hat{f}_2$ neprekidna produženja funkcije f onda se funkcija $\hat{f}_1 - \hat{f}_2$ poništava na nekoj okolini skupa $\sigma(U) = \mathrm{supp}(E)$, pa je $E(\hat{f}_1) = E(\hat{f}_2)$. Ovako produžen homomorfizam E je neprekidan ako na prostoru $\mathscr{C}(\sigma(U);\ z_j,q_j;\ j= 1,\dots,m)$, svih kompleksnih funkcija koje su neprekidne na nekoj okolini (u C) skupa $\sigma(U)$ i koje imaju neprekidne izvode reda $\leqslant q_j$ u okolini tačke z_j za $z_j\in \sigma(U)$, $j\in\{1,\dots,m\}$, uvedemo topologiju analogno kao što smo to uradili na $\mathcal{C}(z_j,q_j;\ j=1,\dots,m)$ (jer se funkcija $\hat{f}$ može odabrati tako da njena norma u odgovarajućem prostoru $\mathcal{D}_k(z_j,q_j;\ j=1,\dots,m)$ nije veća od norme funkcije f u prostoru $\mathcal{D}_k(\sigma(U);\ z_j,q_j; j\in\{1,\dots,m\})$). Provodeći sada razmatranja kao poslije teorema 3.7. možemo definisati homomorfizam E na skupu svih kompleksnih funkcija koje su Baireove prve klase na nekoj okolini (koja zavisi od funkcije) skupa $\sigma(U)$ i koje u nekoj okolini tačke z_j imaju neprekidne izvode reda $\leq q_j$, $z_j\in\sigma(U)$, $j\in\{1,\dots,m\}$. Od sada kada govorimo o homomorfizmu E mislimo na ovako produžen homomorfizam. Dakle homomorfizam E koji odgovara pozitivirajućem trigonometrijskom polinomu p_o iz leme 3.8. je definisan na skupu svih kompleksnih funkcija koje su Baireove prve klase na nekoj okolini spektra $\sigma(U)$ i koje u okolini tačke iz $c(U)$ imaju neprekidne izvode do reda jednakog višestrukosti te tačke kao nule pozitivirajućeg trigonometrijskog polinoma p_o.

Neka, kao i u dijelu II., $\mathcal{A}(C\setminus c(U))$ označava algebru podskupova skupa C generisanu lukovima čije krajnje tačke ne pripadaju skupu $c(U)$. Neka je E homomorfizam konstruisan u prethodnom pasusu u odnosu na pozitivirajući trigonometrijski polinom J-unitarnog operatora U sa osobinom (3.11).

TEOREM 3.9. Preslikavanje $E_o:\Delta \longmapsto E(\chi_\Delta)$, $\Delta\in\mathcal{A}(C\setminus c(U))$ (koje ćemo poslije ovog teorema označavati takođe sa E) je svojstvena spektralna funkcija pozitibilnog J-unitarnog operatora U čiji spektar leži na jediničnoj kružnici C.

Dokaz. Osobina 1) iz definicije 2.2. je očigledna na osnovu teorema 3.7. Osobina 2) iz definicije 2.2 slijedi neposredno iz definicije kritičnih tačaka operatora U. Da bi dokazali da preslikavanje E_o zadovoljava i uslov 3) iz definicije 2.2. uzmimo tačku $z \in \text{supp}(E_o) \setminus c(U)$. Pošto $z \notin c(U)$ postoji okolina Δ tačke z, $\Delta \in \mathcal{A}(C \setminus c(U))$ za koju je prostor $E_o(\Delta)H$ semidefinitan. Imamo da je $E_o(\Delta)H \neq \{0\}$ jer bi u suprotnom bilo $z \in C \setminus \text{supp}(E_o)$. Tako je dokazano da je svaka tačka iz $\text{supp}(E_o) \setminus c(U)$ definitnog tipa. Preslikavanje E_o zadovoljava i uslov 4) iz definicije 2.2. Dokažimo to. Neka je skup Δ_o iz $\mathcal{A}(C \setminus c(U))$, $\Delta_j \subseteq \Delta_o$, $\Delta_j \in \mathcal{A}(C \setminus c(U))$, $j=1,2,\ldots,i$ vrijedi $\Delta_o = \bigcup \Delta_j$. Definišimo skupove $\Delta_j' = \bigcup \{\Delta_k;\ k=1,\ldots,j\}$. Očigledno je $\Delta_j' \subseteq \Delta_{j+1}'$, $j=1,2,\ldots$ i $\Delta_o = \bigcup \Delta_j'$. Neka je ν najmanji prirodan broj sa osobinom $\Delta_o \cap c(U) = \Delta_\nu' \cap c(U)$. Pošto je $\Delta_\nu' \in \mathcal{A}(C \setminus c(U))$ postoji otvoren skup Δ iz $\mathcal{A}(C \setminus c(U))$ strogo sadržan u skupu Δ_ν' i $\Delta \supseteq c(U)$. Funkcije $\chi_{\Delta_o \setminus \Delta_\nu'}$ i $\chi_{\Delta_j' \setminus \Delta_\nu'}$ poništavaju se na skupu Δ_ν' i mogu biti predstavljene kao limes po tačkama uniformno ograničenog niza funkcija iz $\mathcal{C}(C \setminus \Delta)$. Kao što smo već istakli linearan funkcional

$$g \longmapsto [E(g)x,y] \qquad (g \in \mathcal{C}(C \setminus \Delta),\ x,y \in H)$$

je neprekidan na prostoru $(\mathcal{C}(C \setminus \Delta), \|\cdot\|)$, pa prema Rieszovom teoremu reprezentacije postoji regularna kompleksna Borelova mjera μ_{xy} na $C \setminus \Delta$ za koju vrijedi

$$[E(g)x,y] = \int g\, d\mu_{xy} \qquad (g \in \mathcal{C}(C \setminus \Delta),\ x,y \in H)$$

Na osnovu definicije homomorfizma E odavde slijedi da je

$$\begin{aligned} &[E_o(\Delta_o \setminus \Delta_\nu')x,y] = \mu_{xy}(\Delta_o \setminus \Delta_\nu') \\ \text{i} \quad &[E_o(\Delta_j' \setminus \Delta_\nu')x,y] = \mu_{xy}(\Delta_j' \setminus \Delta_\nu') \end{aligned} \qquad (j=1,2,\ldots;\ x,y \in H)$$

Pošto vrijedi

$$\mu_{xy}(\Delta_o \setminus \Delta'_\nu) = \lim_{j\to\infty} \mu_{xy}(\Delta'_j \setminus \Delta'_\nu) \qquad (x,y\in H)$$

odmah dobijamo da je

$$E_o(\Delta_o \setminus \Delta'_\nu) = \lim_{j\to\infty} E_o(\Delta'_j \setminus \Delta'_\nu),$$

pri čemu je posljednji limes uzet u odnosu na slabu konvergenciju operatora u $L(H)$. Odavde dobijamo da je i

$$E_o(\Delta_o) = \lim_{j\to\infty} E_o(\Delta'_j) \text{, tj } E_o(\Delta_o) = \sum_{j=1}^{\infty} E_o(\Delta_j) \qquad (3.12)$$

u slaboj konvergenciji operatora. Kao slabo konvergentan niz, niz J-ortogonalnih projektora $(E_o(\Delta'_j))$ je ograničen u $(L(H), \|\cdot\|)$. Očigledno je da vrijedi $E_o(\Delta'_j)\, E_o(\Delta'_k) = E_o(\Delta'_{\min\{k,j\}})$, pa prema lemi 2.3. dobijamo da je niz $(E_o(\Delta'_j))$ konvergentan u jakoj konvergenciji operatora. Tako je dokazano da limes i suma u (3.12) postoje i u jakoj konvergenciji operatora i osobina 4) je dokazana. Time je dokazano da je preslikavanje E_o J-spektralna funkcija na Kreinovom prostoru H. Dokažimo sada da J-spektralna funkcija E_o ima osobine (a) i (b) iz definicije 2.4., tj. da je svojstvena spektralna funkcija operatora U. Pošto je operator U ograničen osobina (a) svodi sa na komutativnost operatora U sa operatorima $E_o(\Delta)$, $\Delta \in \mathcal{A}(C\setminus c(U))$. Ovo je očigledna posljedica činjenice da je E homomorfizam i da je proizvod dvije kompleksne funkcije na C komutativan. Dokažimo osobinu (b), tj. da vrijedi $\sigma(U|E_o(\Delta)H) \subseteq Cl(\Delta)$, Δ iz $\mathcal{A}(C\setminus c(U))$. Za $z \notin Cl(\Delta)$ funkcija $(\cdot - z)^{-1}\chi_\Delta$ pripada prostoru $\mathcal{L}(z_j, q_j;\ j=1,\dots,m)$, za $\Delta \in \mathcal{A}(C\setminus c(U))$. Ovdje, kao i prije smatramo da je $\infty\cdot 0 = 0$ i da je $c(U) = \{z_1,\dots,z_m\}$ i q_j je višestrukost nule z_j, $j=1,\dots,m$ polinoma p_o sa osobinom (3.11). Vrijedi

$$E((\cdot-z)^{-1}\chi_\Delta)\ E(\cdot-z)=E(\cdot-z)E((\cdot-z)^{-1}\chi_\Delta) = E(\chi_\Delta) = E_o(\Delta)$$

Zbog osobine (a) vrijedi $U(E_o(\Delta)H) \subseteq E_o(\Delta)H$, a zbog posljednjeg niza jednakosti za proizvoljno $x \in E_o(\Delta)H$ imamo da je

$$E((\cdot-z)^{-1}\chi_\Delta)\ (U - zI)x = (U-zI)\ E((\cdot-z)^{-1}\chi_\Delta)x = x,$$

pa je operator $(U - zI)|E_o(\Delta)H = U|E_o(\Delta)H - zI_\Delta$ injektivan na $E_o(\Delta)H$ i $\mathrm{ran}(U|E_o(\Delta)H - zI_\Delta) = E_o(\Delta)H$, tj. $z \in \rho(U|E_o(\Delta)H)$. Tako je teorem dokazan.

Lako se vidi da je J-spektralna funkcija E_o (u daljem E) iz teorema 3.9. nezavisna od izbora pozitivirajućeg trigonometrijskog polinoma p_o sa osobinom (3.11). (ovo je naravno i posljedica teorema 2.6.) Na osnovu ovoga i relacija (3.1o) i (3.1o') slijedi da u tački $z \in \sigma(U) \setminus c(U)$ svi pozitivirajući trigonometrijski polinomi J-unitarnog operatora U, $\sigma(U) \subseteq C$, za koje tačka z nije nula imaju u tački z isti znak. Stvarno, ako pretpostavimo suprotno onda postoji okolina Δ tačke z, $\Delta \in \mathcal{A}(C \setminus c(U))$ i pozitivirajući trigonometrijski polinomi f i g J-unitarnog operatora U za koje je

$$f(z) > 0, \qquad g(z) < 0 \qquad (z \in \mathrm{Cl}(\Delta)).$$

Na osnovu (3.1o) odnosno (3.1o') odavde slijedi da je

$$[E(\Delta)x,x] \geqslant 0, \quad [E(\Delta)x,x] \leqslant 0 \qquad (x \in H)$$

tj. $[E(\Delta)x,x] = 0$ $(x \in H)$. Odavde prema (1.28) vrijedi

$$[E(\triangle)x,y] = 0 \qquad (x,y \in H),$$

odakle je $E(\triangle)x = 0$, za x iz H tj $E(\triangle) = 0$, a ovo povlači da je $z \in C \setminus \mathrm{supp}(E) \subseteq \varrho(U)$, što je suprotno sa izborom broja z. Na isti način se vidi da za J-spektralnu funkciju E vrijedi

$$\mathrm{supp}_+(E) = \{z \in \mathrm{supp}(E) : g(z) > 0\}$$

i

$$\mathrm{supp}_-(E) = \{z \in \mathrm{supp}(E) : g(z) < 0\}$$

gdje je g pozitivirajuća funkcija operatora U iz leme 3.8. Koristeći prethodna razmatranja dokazaćemo da u izvjesnom smislu postoji minimalan pozitivirajući polinom J-unitarnog operatora U sa osobinom (3.1o). Označimo sa $v(z,p)$ višestrukost nule z trigonometrijskog polinoma p ($v(z,p)=0$ ako i samo ako je $p(z)=0$).

TEOREM 3.1o. Postoji pozitivirajući trigonometrijski polinom g pozitibilnog J-unitarnog operatora U, $\sigma(U) \subseteq C$, sa osobinom (3.11) i

$$v(z,g) \leqslant v(z,p) \qquad (z \in c(U)), \tag{3.13}$$

pri čemu je p proizvoljan pozitivirajući trigonometrijski polinom operatora U.

Dokaz. Za proizvoljan pozitivirajući trigonometrijski polinom p operatora U zbog $c(U) \subseteq N(p) \cap \sigma(U)$ vrijedi $v(z,p) \geqslant 1$ za sve z iz $c(U)$. Neka je $c(U) = \{z_1,\ldots,z_m\}$. Stavimo

$$q_j = \min\{v(z_j,p);\ p \text{ pozitivirajući trigonometriski polinom operatora } U\}, j=1,\ldots,m$$

Neka je p_0 pozitivirajući trigonometrijski polinom operatora U iz leme 3.8., $z_j \in c(U)$ takav da za svaki luk $\Delta \in \mathcal{A}(C \setminus c(U))$, $\Delta \neq C$, koji sadrži tačku z_j u obe komponente povezanosti skupa $\Delta \setminus \{z_j\}$ leži beskonačno mnogo tačaka iz $\mathcal{O}(U)$ i neka je p_j pozitivirajući trigonometrijski polinom operatora U za koji vrijedi $v(z_j, p_j) = q_j$. Uzmimo luk Δ iz $\mathcal{A}(C \setminus c(U))$, $\Delta \neq C$ za koji vrijedi $(N(p_o) \cap N(p_j)) \cap \Delta = \{z_j\}$. Prema primjedbi koja je prethodila ovom teoremu slijedi da trigonometrijski polinomi p_o i p_j imaju isti znak na $\Delta \setminus \{z_j\}$, pa zaključujemo da je broj $v(z_j, p_o) - q_j$ paran za neki broj $k_j \in \{0,1,2,\ldots\}$ vrijedi $v(z_j, p_o) - q_j = 2k_j$. Stavimo

$$g_1(z) := (z - z_j)^{-k_j} \left(\frac{1}{z} - \frac{1}{z_j} \right)^{-k_j} p_o(z) \qquad (z \neq 0)$$

Za trigonometrijski polinom g_1 vrijedi $v(z_j, g_1) = q_j$ i $v(z_k, g_1) = v(z_k, p_o)$, $k \neq j$, $k \in \{1,2,\ldots,m\}$ i g_1 je pozitivirajuća funkcija operatora U. Stvarno, vrijedi $g_1 \chi_\Delta p_j \geqslant 0$ na C i funkcija $g_1 \chi_\Delta / p_j$ je ograničena funkcija na C. Prema tvrdnji analognoj sa (iv) iz teorema 3.7. vrijedi

$$[g_1(U)E(\Delta)x, x] \geqslant 0 \qquad (x \in H).$$

Takođe vrijedi $g_1 \chi_{C\setminus\Delta}\, p_o \geqslant 0$ na C i funkcija $g_1 \chi_{C\setminus\Delta} / p_o$ je ograničena na C pa je i

$$[g_1(U)E(C \setminus \Delta)x, x] \geqslant 0 \qquad (x \in H).$$

Iz posljednje dvije nejednakosti slijedi da je g_1 pozitivirajuća funkcija operatora U. Napomenimo da je za ovaj zaključak bilo važno samo da su trigonometrijski polinomi g_1 i p_j istog znaka na skupu $\Delta \setminus \{z_j\}$, a g_1 i p_o istog znaka na $C \setminus \Delta$. Polazeći sada od pozitivirajućeg trigonometrijskog polinoma p_1 i provodeći isti postupak za sve tačke iz $c(U)$ sa gore navedenom osobinom dobijamo pozitivirajući trigonometrijski polinom g_2 operatora U koji ima osobinu (3.11) i za koga je nejednakost (3.13) ispunjena za sve tačke z iz $c(U)$ sa osobinom da za svaki luk Δ iz $\mathcal{A}(C\setminus c(U))$, $\Delta \neq C$, $z \in \Delta$ u obe komponente skupa $\Delta\setminus\{z_j\}$ ima beskonačno mnogo tačaka iz skupa $\sigma(U)$.

Neka je sada $z_j \in c(U)$ tačka sa osobinom da postoji luk Δ iz $\mathcal{A}(C\setminus c(U))$ ne veći od pola kružnice, $z_j \in \Delta$ i u jednoj komponenti skupa $\Delta\setminus\{z_j\}$ nema ni jedne tačke skupa $\sigma(U)$, a u drugoj komponenti skupa $\Delta\setminus\{z_j\}$ ima beskonačno mnogo tačaka iz $\sigma(U)$. Neka je p_j pozitivirajući trigonometrijski polinom operatora U sa osobinom (3.11) za koji vrijedi $v(z_j,p_j)=q_j$. Jasno je da možemo odabrati luk Δ koji ima gore navedenu osobinu i za koji je $(N(g_2)\cap N(p_j))\cap\Delta = \{z_j\}$. Prema primjedbi koja je prethodila ovom teoremu funkcije g_2 i p_j imaju isti znak na onoj komponenti povezanosti, Δ', skupa $\Delta\setminus\{z_j\}$ koja sadrži elemente skupa $\sigma(U)$. Ako funkcije g_2 i p_j imaju isti znak i na drugoj komponenti Δ'' skupa $\Delta\setminus\{z_j\}$ onda postupamo kao i u prethodnom pasusu, polazeći od trigonometrijskog polinoma g_2, pa dobijamo pozitivirajući trigonometrijski polinom g_3 operatora U za koji vrijedi

$$v(z_j,g_3)=q_j \text{ i } v(z_k,g_3)=v(z_k,g_2),\ k\neq j,\ k\in\{1,2,\dots,m\}. \quad (3.14)$$

U slučaju da funkcije g_2 i p_j imaju različit znak na komponenti Δ'' skupa $\Delta\setminus\{z_j\}$ broj $v(z_j,g_2)-q_j$ je neparan, $v(z_j,g_2)-q_j = 2k_j+1$ za neko $k_j\in\{0,1,2,\dots\}$. Uzmimo tačku $z'\in\Delta''$ i stavimo

$$g_3(z):=(z-z_j)^{-(k_j+1)}\left(\frac{1}{z}-\frac{1}{z_j}\right)^{-k_j}(z-z')\left(1+\frac{z_j}{z'}\right)g_2(z) \quad (z\neq 0).$$

Označimo sa Δ_0 luk koji se sastoji od luka Δ', tačke z_j i dijela luka Δ'' ograničenog sa z' i z_j. Na osnovu napomene poslije leme 3.8. funkcije g_3 i p_j imaju isti znak na Δ_o, a funkcije g_3 i g_2 imaju isti znak na $C\setminus\Delta_o$. Kao i u prethodnom pasusu zaključujemo da je g_3 pozitivirajuća funkcija operatora U. Za ovako definisan trigonometrijski polinom g_3 vrijedi i (3.14). Nastavljajući ovako dalje dobili bi pozitivirajući trigonometrijski polinom g_4 operatora U koji ima osobinu (3.11) i za koga je ispunjena nejednakost (3.13) za sve tačke z iz c(U) koje su tačke nagomilavanja skupa $\sigma(U)$. Ostalo je samo da razmotrimo izolovane tačke spektra $\sigma(U)$ koje leže u skupu c(U). U ovom slučaju postoji luk Δ iz $\mathcal{A}(C\setminus c(U))$ za koji je $\Delta\cap\sigma(U) = \{z_j\}$ i $(N(g_4)\cap N(p_j))\cap\Delta = \{z_j\}$. S obzirom na podudaranje ili razlikovanje znakova funkcija g_4 i p_j na komponentama povezanosti skupa $\Delta\setminus\{z_j\}$ postupamo kao i u prethodnim slučajevima. Tako dobijamo pozitivirajući trigonometrijski polinom g operatora U sa osobinama (3.11) i (3.13). Tako je teorem dokazan.

Kao što je napomenuto na kraju dokaza teorema 2.5. J-spektralna funkcija E iz teorema 3.9. može se produžiti do ograničene spektralne mjere definisane na σ-algebri Borelovih podskupova skupa $C\setminus\Delta_1$, $\Delta_1\in\mathcal{A}(C\setminus c(U))$, $\Delta_1\supseteq c(U)$ i sa vrijednostima u $L(E(C\setminus\Delta_1)H)$. Za različite skupove Δ_1 iz prethodne rečenice vrijednosti produženja J-spektralne mjere E se podudaraju na zajedničkom dijelu domena. Za ovu spektralnu mjeru vrijedi, analogno sa tvrdnjom (d) iz teorema 2.5.,

$$E(f)\,E(C\setminus\Delta_1) = \Big(\int_{C\setminus\Delta_1} f(z)\,dE(z)\Big)\,E(C\setminus\Delta_1) \qquad (f\in \mathrm{dom}(E))$$

Koristeći ovo dokazaćemo sljedeći

TEOREM 3.11. Neka je U pozitibilan J-unitaran operator čiji spektar leži na jediničnoj kružnici C,

E svojstvena spektralna funkcija operatora U, odnosno homomorfizam definisan u teoremu 3.7. i poslije njega, $c(U) = \{z_1,\dots,z_m\}$ i $q_j = v(z_j,g)$, $j=1,\dots,m$, gdje je g pozitivirajući trigonometrijski polinom operatora U iz teorema 3.10. Tada vrijedi

$$E(f) = \int_C f(z)\, dE(z) + \sum_{j=1}^{m} f^{(q_j)}(z_j) N_j \tag{3.15}$$

pri čemu je f kompleksna funkcija definisana na nekoj okolini u $\mathbb{C}$ spektra $\sigma(U)$, ograničena i izmjeriva u Borelovom smislu i koja u nekoj okolini tačke z_j ima neprekidne izvode reda $\leq q_j$ i $f^{(k)}(z_j) = 0$, $k=0,1,\dots,q_j-1$, $j=1,\dots,m$. U jednakosti (3.15) integral sa desne strane postoji kao nesvojstveni integral u jakoj konvergenciji operatora sa skupom singulariteta $c(U)$ i J-hermitski (tačnije J-pozitivni ili J-negativni) operatori N_j, $j=1,\dots,m$ zadovoljavaju jednakosti:

$$N_j N_k = 0 , \quad N_j E(h) = E(h) N_j = 0 \qquad (j,k=1,\dots,m),$$

gdje je h funkcija iz područja definicije homomorfizma E i $h(z_j) = 0$.

Dokaz. Prema definiciji nesvojstvenog integrala u jakoj konvergenciji operatora je

$$\int_C f(z)\, dE(z) = \lim_{k\to\infty}\Big(\int_{C\setminus\Delta_k} f(z)\, dE(z)\Big)E(C\setminus\Delta_k) \tag{3.16}$$

pri čemu je (Δ_k) niz skupova iz $\mathcal{A}(C\setminus c(U))$ za koje vrijedi $\Delta_k \supseteq \Delta_{k+1}$, $c(U)\subseteq\Delta_k$, $k=1,2,\dots$, $\bigcap\Delta_k = c(U)$, limes u (3.16) postoji u jakoj konvergenciji operatora i nezavisan je od izbora niza (Δ_k) sa gornjim osobinama. Pošto je $\bigcap\Delta_k = c(U)$ svaki skup Δ_k možemo predstaviti kao disjunktnu uniju $\Delta_k = \bigcup_{j=1}^{m} \Delta_{k,j}$, pri čemu je $\Delta_{k,j}$ iz $\mathcal{A}(C\setminus c(U))$, $k=1,2,\ldots$, $j=1,2,\ldots,m$, za dovoljno velike k je $\Delta_{k,j} \cap c(U) = \{z_j\}$ i $\bigcap_k \Delta_{k,j} = \{z_j\}$, $j=1,\ldots,m$. Neka je h funkcija iz $\mathrm{dom}(E)$ i $h^{(k)}(z_j)=0$, $k=0,1,\ldots,q_j-1$, j fiksirano iz skupa $\{1,\ldots,m\}$. Dokazaćemo da u jakoj konvergenciji operatora postoji limes

$$\lim_{k\to\infty} E(h)E(\Delta_{kj})$$

Na osnovu razmatranja na početku dokaza teorema 3.7. linearno preslikavanje $T: f \longmapsto g(U)f(U)x$ (x proizvoljan čvrst vektor iz H) definisano na skupu $\mathcal{F}(U)\cap\mathcal{C}(C)$, $\mathcal{C}(C)$ skup neprekidnih kompleksnih funkcija na C, je ograničeno, pa se može produžiti do ograničenog operatora sa $\mathcal{C}(C)$ u H. Na osnovu teorema VI.7.3. iz [4] o reprezentaciji ograničenih operatora sa $\mathcal{C}(C)$ u H (vidjeti takođe teorem VI.7.6.) postoji vektorska mjera μ_x definisana na Borelovim podskupovima skupa C sa vrijednostima u prostoru H takva da je

$$T\,f = \int_C f(z)\, d\mu_x(z) \qquad (f\in \mathcal{C}(C)).$$

Na osnovu definicije homomorfizma E odavde slijedi da je

$$g(U)E(f)x = \int_C f(z)d\mu_x(z) \qquad (f\in \mathrm{dom}(C)). \quad (3.17)$$

Prema pretpostavci o funkciji h, za dovoljno veliko k funkcija $(h/g)\chi_{\Delta_{k,j}}$ je ograničena i pripada $\mathrm{dom}(E)$. Vrijednost ove funkcije u tački z_j je prema Taylorovoj formuli jednaka $h^{(q_j)}(z_j)/g^{(q_j)}(z_j)$, pa ograničen niz funkcija

$$((h/g - (h^{(q_j)}/g^{(q_j)})(z_j))\chi_{\Delta_{kj}})_k$$

konvergira po tačkama ka nuli. Na osnovu teorema IV.10.10. iz [4] i jednakosti (3.17) vrijedi

$$\lim_k (g(U)E((h/g)\chi_{\Delta_{kj}})x - h^{(q_j)}(z_j)/g^{(q_j)}(z_j)g(U)E(\Delta_{kj})x) = 0 \quad (3.18)$$

Pošto je $g(U)E(\Delta)x = \mu_x(\Delta)$, $\Delta \in \mathcal{A}(C \setminus c(U))$, a μ_x je vektorska mjera vrijedi

$$\lim_{k\to\infty} g(U)E(\Delta_{kj})x = \mu_x(\{z_j\})$$

i ovaj limes ne zavisi od izbora niza $(\Delta_{kj})_k$. Dakle u jakoj konvergenciji operatora postoji

$$\lim_{k\to\infty} g(U)E(\Delta_{kj})$$

i on ne zavisi od izbora niza $(\Delta_{kj})_k$. Definišimo:

$$N_j := (g^{(q_j)}(z_j))^{-1} \lim_{k\to\infty} g(U)E(\Delta_{kj}).$$

Zajedno sa (3.18) ovo daje

$$\lim_{k\to\infty} E(h)\, E(\Delta_{kj}) = h^{(q_j)}(z_j)N_j, \quad (3.19)$$

pri čemu se limes uzima u jakoj konvergenciji operatora i ne zavisi od izbora niza $(\Delta_{kj})_k$. Ovako definisan operator N_j je nezavisan od izbora pozitivirajuće funkcije g i on je J-pozitivan ili J-negativan operator, zavisno od toga da li je $g^{(q_j)}(z_j)$ $(\neq 0)$ pozitivan ili negativan broj. Napomenimo da je u ovom razmatranju j bio proizvoljan fiksiran broj iz skupa $\{1,\ldots,m\}$, a h funkcija iz dom(E) sa osobinom

$h^{(k)}(z_j) = 0$, $k=0,1,\ldots,q_j-1$, pa je na gornji način definisan operator N_j za sve $j=1,\ldots,m$. Neka je sada f funkcija koja zadovoljava pretpostavke teorema. Prema napomeni neposredno prije teorema i do sada dokazanom je

$$\lim_{k\to\infty}\Big(\int_{C\setminus\Delta_k} f(z)\, dE(z)\Big)E(C\setminus\Delta_k) = \lim_{k\to\infty} E(f)E(C\setminus\Delta_k) =$$

$$= \lim_{k\to\infty}(E(f) - E(f)E(\Delta_k)) = E(f) - \lim_{k\to\infty} E(f)E(\Delta_k) =$$

$$= E(f) - \sum_{j=1}^{m} \lim_{k\to\infty} E(f)E(\Delta_{kj}) = E(f) - \sum_{j=1}^{m} f^{(q_j)}(z_j)N_j$$

Svi limesi u posljednjem nizu jednakosti uzeti su u jakoj konvergenciji operatora pa je ovim prema (3.16) dokazana jednakost (3.15). Treba još samo dokazati da operator N_j $(j=1,\ldots,m)$ ima navedene osobine. Ove osobine slijede primjenom jednakosti (3.19). Stvarno:

$$N_j^2=(g^{(q_j)}(z_j))^{-2}\lim_{k\to\infty} g^2(U)E(\Delta_{kj})=(g^{(q_j)}(z_j))^{-2}(g^2)^{(q_j)}(z_j)\, N_j=0.$$

$N_j\, N_k = 0$ $(j \neq k)$ je trivijalno, a za funkciju h iz dom(E) za koju je $h(z_j)=0$ imamo da je

$$N_j\, E(h) = (g^{(q_j)}(z_j))^{-1} \lim_{k\to\infty} g(U)E(\Delta_{kj})E(h) = \lim_{k\to\infty} E(g\, h)E(\Delta_{kj}) =$$

$$= (g\, h)^{(q_j)}(z_j)\, N_j = 0$$

Očigledno je da operator N_j $(j=1,\ldots,m)$ komutira sa svakim operatorom iz ran(E) jer operatori iz ran(E) međusobno komutiraju. Ovim je dokaz teorema završen.

Napomenimo da je iz definicije operatora N_j $(j=1,\ldots,m)$ očigledno da je $\mathrm{ran}(N_j) \subseteq \mathrm{Cl}(\mathrm{ran}(g(U)))$. Pošto vrijedi $g(U)\, N_j = 0$, imamo da je i $\mathrm{ran}(N_j) \subseteq \ker(g(U))$, $j=1,\ldots,m$. Odavde je očigledno da je $N_j=0$, $j=1,\ldots,m$ ako je $\mathrm{Cl}(\mathrm{ran}(g(U))) \cap \ker(g(U)) = \{0\}$.

LEMA 3.12. Neka je $B \in L(H)$ ograničen operator i $h \in \mathcal{F}(B)$. Tada za sve tačke z u kojima je funkcija h analitička vrijedi jednakost:

$$h(z)I - h(B) = Q(z,B)(zI - B),$$

pri čemu je $(z,w) \longmapsto Q(z,w)$ analitička funkcija i u odnosu na z i u odnosu na w na nekoj okolini spektra $\sigma(B)$.

Dokaz. Prema Riesz-Dunfordovom funkcionalnom računu vrijedi

$$h(z)I - h(B) = \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{h(z) - h(w)}{z - w}(z - w)R(w,B)dw =$$

$$= \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{h(z) - h(w)}{z - w} R(w,B)dw\,(zI - B)$$

gdje je Γ pozitivno orijentisana kriva koja je granica Cauchyjevog područja Ω čije je zatvorenje sadržano u području analitičnosti funkcije h i $\Omega \supseteq \sigma(U)$. Stavimo

$$Q(z,w) = \frac{h(z) - h(w)}{z - w} \qquad (z,w \in \mathrm{dom}(h),\ z \neq w).$$

Očigledno je da je funkcija Q analitička u području analitičnosti funkcije h u odnosu na z i u odnosu na w. Time je lema dokazana.

KOROLAR 3.13. Pod pretpostavkom leme 3.12. i $z \in \rho(B)$ vrijedi

$$h(z)R(z,B) = h(B)R(z,B) + Q(z,B).$$

PROPOZICIJA 3.14. Neka je U pozitibilan J-unitaran operator čiji spektar leži na jediničnoj kružnici C, E svojstvena spektralna funkcija operatora U,

$c(U) = \{z_1,\ldots,z_m\}$, N_j, $j=1,\ldots,m$ operatori iz teorema 3.11., g proizvoljna pozitivirajuća funkcija operatora U i $z \in \rho(U)$ tačka iz područja analitičnosti funkcije $1/g$. Tada vrijedi

$$R(z,U)= \frac{1}{g(z)}\left\{\int_C \frac{g(w)}{z-w}\, dE(w)+Q(z,U)+\sum_{j=1}^{m}\frac{(-1)^{q_j} g^{(q_j)}(z_j)N_j}{z-z_j}\right\} \qquad (3.2o)$$

pri čemu je funkcija $(z,w) \longmapsto Q(z,w)$ analitička funkcija u nekoj okolini spektra $\sigma(U)$ i u odnosu na z i u odnosu na w i pri čemu integral na desnoj strani jednakosti (3.2o) postoji kao nesvojstveni integral u jakoj konvergenciji operatora sa $c(U)$ kao skupom singulariteta.

Dokaz. Prema korolaru 3.13. vrijedi

$$g(z)R(z,U) = g(U)R(z,U) + Q(z,U).$$

Kako je tačka z i iz područja analitičnosti funkcije $1/g$ vrijedi

$$R(z,U) = (1/g(z))(g(U)R(z,U) + Q(z,U))$$

Prema teoremu 3.11. za funkciju $w \longmapsto g(w)/(z - w)$ imamo da je

$$g(U)R(z,U) = \int_C \frac{g(w)}{z-w}\, dE(w) + \sum_{j=1}^{m}\frac{(-1)^{q_j} g^{(q_j)}(z_j)}{z - z_j} N_j$$

Zajedno sa prethodnom jednakošću odavde je

$$R(z,U) = \frac{1}{g(z)}\left\{\int_C \frac{g(w)}{z-w}\, dE(w) + Q(z,U) + \sum_{j=1}^{m}\frac{(-1)^{q_j} g^{(q_j)}(z_j)}{z - z_j} N_j\right\}$$

Time je propozicija dokazana.

Pomoću ove propozicije možemo podrobnije ispitati kritične tačke operatora U.

TEOREM 3.15. Neka je U pozitibilan J-unitaran operator, $\sigma(U) \subseteq C$, neka je α kritična tačka operatora U i W_α potprostor definisan u drugom dijelu ovog rada u odnosu na svojstvenu spektralnu funkciju E operatora U. Tada se potprostor W_α podudara sa korjenim potprostorom H_α operatora U. Pored toga vrijedi

$$(\alpha I - U)^{n+1} (W_\alpha) = \{0\},$$

pri čemu je $n=v(\alpha, g)$, g pozitivirajući triginometrijski polinom operatora U iz teorema 3.1o.

Dokaz. Za vektor $x \in E(\Delta)H, \Delta \in \mathcal{A}(C \setminus c(U))$ funkcija $z \longmapsto R(z, U|E(\Delta)H)x$ je analitička van skupa $Cl(\Delta)$. Dakle za $x \in E(\Delta)H$ funkcija $z \longmapsto R(z,U)x$ može se analitički produžiti na skup $\mathbb{C} \setminus Cl(\Delta)$. Za vektor $x \in W_\alpha$ funkcija $z \longmapsto R(z,U)x$ može se dakle analitički produžiti na skup $\mathbb{C} \setminus \{\alpha\}$. Neka je $z \in \rho(U)$ tačka koja pripada području analitičnosti funkcije $1/g$. Na osnovu definicije potprostora W_α i propozicije 3.14. za $x \in W_\alpha$ vrijedi jednakost

$$R(z,U)x = \frac{1}{g(z)} \left(Q(z,U) + \frac{(-1)^n g^{(n)}(\alpha)}{z - \alpha} N_\alpha\right)x$$

Dakle u tački α rezolventa restrikcije operatora U na potprostor W_α ima pol reda $\leq n+1$. Tačka α je jedina tačka spektra operatora $U|W_\alpha$, pa prema teoremu 1.38. vrijedi

$$(\alpha I - U)^{n+1} (W_\alpha) = \{0\}$$

Dakle $W_\alpha \subseteq H_\alpha$. Obrnuto, neka $x \in H_\alpha$ i neka je $\Delta \in \mathcal{A}(C \setminus c(U))$, $\alpha \notin \Delta$. Prema pretpostavci je $\sigma(U|E(\Delta)H) \subseteq Cl(\Delta)$, a $\alpha \notin Cl(\Delta)$. Dakle ograničenje operatora $(\alpha I - U)^m$, $m=1,2,\ldots,$ na potprostor $E(\Delta)H$ je obostrano jednoznačno preslikavanje, pa je $(\alpha I - U)^m y = 0$, $y \in E(\Delta)H$, ako i samo ako je $y = 0$. Pošto $x \in H_\alpha$ postoji prirodan broj m za koji vrijedi

$$0 = (\alpha I - U)^m x = (\alpha I - U)^m E(\Delta)x + (\alpha I - U)^m E(C \setminus \Delta)x$$

Potprostori $E(\Delta)H$ i $E(C\setminus\Delta)H$ su invarijantni u odnosu na operator $\alpha I - U$ i njihova suma je direktna, pa na osnovu posljednje jednakosti zaključujemo da je

$$(\alpha I - U)^m E(\Delta)x = 0,$$

a ovo je moguće samo ako je $E(\Delta)x = 0$. Pošto je skup $\Delta \in \mathcal{A}(C\setminus c(U))$, $\alpha \notin \Delta$ bio proizvoljan ovim je dokazano da $x \in W_\alpha$. Dakle $W_\alpha = H_\alpha$. Ovim je teorem dokazan.

KOROLAR 3.16. Neka je α kritična tačka operatora U iz prethodnog teorema. Tada je $\alpha \in \sigma_p(U)$ ako i samo ako je $W_\alpha \neq \{0\}$.

Dokaz. Ova tvrdnja je posljedica prethodnog teorema i očigledne činjenice da $\alpha \in \sigma_p(U)$ ako i samo ako je $H_\alpha \neq \{0\}$.

KOROLAR 3.17. Ako u okolini kritične tačke α leže tačke samo jednog tipa definitnosti iz $\mathrm{supp}(E)\setminus\{\alpha\}$ tada je $\alpha \in \sigma_p(U)$.

Dokaz. U propoziciji 2.2. je dokazano da za kritičnu tačku α sa osobinom iz korolara vrijedi $W_\alpha \neq \{0\}$, pa tvrdnja slijedi iz prethodnog korolara.

KOROLAR 3.18. Neka je α kritična tačka operatora U iz teorema 3.15. i neka pozitivirajuća funkcija operatora U u tački α ima nulu parnog reda. Tada $\alpha \in \sigma_p(U)$.

Dokaz. Na osnovu teorema 3.3. postoji pozitivirajući trigonometrijski polinom operatora U koji u tački α ima nulu parnog reda. S obzirom na relacije (3.1o) i (3.1o') možemo primijeniti prethodni korolar.

Na kraju ovog dijela rada iskoristićemo teorem 3.15. da dopunimo lemu 3.2. i za izolovane tačke spektra pozitibilnog J-unitarnog operatora U koje leže na jediničnoj kružnici. Iz teorema 3.15. neposredno slijedi da Rieszov indeks kritične tačke α operatora U nije veći od $v(\alpha, g) + 1$, gdje je g pozitivirajući trigonometrijski polinom operatora U iz teorema 3.1o. Dokažimo da u slučaju da je kritična tačka z_o izolovana tačka spektra operatora U njen Rieszov indeks nije manji od $v(z_o,g)$. Naime u ovom slučaju za dovoljno malen $\Delta \in \mathcal{A}(C\setminus c(U))$, tj. takav $\Delta \in \mathcal{A}(C\setminus c(U))$ za koji je $\Delta \cap \sigma(U) = \{z_o\}$ vrijedi $E(\Delta) = E(\{z_o\},U)$, pa ako bi bilo

$$(z_oI - U)^{v(z_o,g)-1}(E(\Delta)H) = \{0\} \qquad (3.21)$$

uzimajući $z' \in \Delta\setminus\{z_o\}$ i stavljajući

$$g_1(z) := (z - z_o)^{-1}(z - z')(1 + \frac{z_o}{z'})\, g(z) \qquad (z \neq 0)$$

dobijamo pozitivirajući trigonometrijski polinom operatora U. Vrijedi naime $[g_1(U)E(C\setminus\Delta)x,x] \geq 0$ $(x \in H)$ jer je $g_1\chi_{C\setminus\Delta}/g$ nenegativna ograničena funkcija i $[g_1(U)E(\Delta)x,x] = 0$ $(x \in H)$ zbog (3.21). Za funkciju g_1 vrijedi $v(z_o,g_1) < v(z_o,g)$, što je prema teoremu 3.1c. nemoguće. Dakle Rieszov indeks tačke z_o u odnosu na operator U nije manji od $v(z_o,g)$.

U slučaju da $z_o \notin c(U)$, z_o izolovana tačka spektra $\sigma(U)$, dokazaćemo da je Rieszov indeks tačke

z_o u odnosu na operator U jednak 1. Postoji skup Δ iz $\mathcal{A}(C\setminus c(U))$ takav da je $E(\Delta) \neq 0$ i prostor $(E(\Delta)H, |[\cdot, \cdot]|)$ je Hilbertov prostor i $U|E(\Delta)H$ je unitaran operator u ovom prostoru. Tačka z_o je izolovana tačka spektra unitarnog operatora $U|E(\Delta)H$, pa je $z_o \in \sigma_p(U|E(\Delta)H)$, zbog čega je i $z_o \in \sigma_p(U)$. Dakle Rieszov indeks tačke z_o nije manji od 1. Sa druge strane postoji pozitivirajući trigonometrijski polinom f operatora U za koji je $f(z_o) \neq 0$, pa iz jednakosti (3.2o) dobijamo da rezolventa operatora U u tački z_o ima pol reda najviše jedan zbog čega je prema teoremu 1.38. i Rieszov indeks tačke z_o najviše jedan. Objedinimo ova razmatranja u propoziciju:

PROPOZICIJA 3.19. Neka je U pozitibilan J-unitaran operator, $\sigma(U) \subseteq C$ i g pozitivirajuća funkcija operatora U iz teorema 3.1o. Svaka izolovana tačka z_o spektra operatora U je svojstvena vrijednost operatora U i njen Rieszov indeks u odnosu na operator U jednak je $v(z_o,g)$ ili $v(z_o,g)+1$ u slučaju da je $z_o \in c(U)$, a jednak je jedan u slučaju da $z_o \notin c(U)$.

Na osnovu dosadašnjih razmatranja možemo odrediti broj $v(z_o,g)$ gdje je $z_o \in c(U) \cap \sigma_c(U)$, a g pozitivirajuća funkcija iz teorema 3.1o. Tada je broj $v(z_o,g)$, prema korolaru 3.18. neparan. Dokazaćemo da on mora biti jednak jedan jer za $v(z_o,g) \geqslant 3$ i funkcija

$$g_1(z) := (z - z_o)^{-1}\left(\frac{1}{z} - \frac{1}{z_o} \right)^{-1} g(z) \qquad (z \neq 0)$$

je pozitivirajuća funkcija operatora U i za nju vrijedi $v(z_o,g_1) < v(z_o,g)$, što je prema teoremu 3.1o. nemoguće. Dakle $v(z_o,g) = 1$, za $z_o \in c(U) \cap \sigma_c(U)$.

IV. POZITIBILNI J-HERMITSKI OPERATORI

DEFINICIJA 4.1. Za J-hermitski operator A kažemo da je <u>pozitibilan</u> ako je $\rho(A) \neq \emptyset$ i ako postoji polinom p koji na realnoj osi ima realne vrijednosti i za koga vrijedi

$$[p(A)x,x] \geqslant 0 \quad \text{za sve} \quad x \in \mathrm{dom}(A^m),$$

gdje m označava stepen polinoma p. U ovom slučaju p se naziva <u>pozitivirajući</u> <u>polinom</u> operatora A.

TEOREM 4.1. Neka je A J-hermitski operator sa osobinom $\rho(A) \neq \emptyset$. Operator A je pozitibilan ako i samo ako postoji funkcija $f \in \mathcal{F}(A)$ za koju vrijedi

$$[f(A)x,x] \geqslant 0 \qquad (x \in H) \tag{4.1}$$

Dokaz. Pošto je $\rho(A) \neq \emptyset$ postoji tačka $z_o \in \rho(A)$, $z_o \neq \bar{z}_o$. Neka je U Cayle jeva transformacija operatora A data sa (1.35), $\varepsilon = 1$, $z = z_o$. Tada je U J-unitaran operator i $1 \notin \sigma_p(U)$. Pretpostavimo da za operator A postoji funkcija f koja je analitička na nekoj okolini skupa $\sigma_e(A)$ i za koju vrijedi (4.1). Kao i u (1.37) definišemo

$$\Phi: z \mapsto \frac{z-\bar{z}_o}{z-z_o} = \zeta \quad (z \in \mathbb{C},\ z \neq z_o),\ \Phi(z_o) = \infty \ \text{ i } \ \Phi(\infty) = 1 \tag{4.2}$$

Kao što smo vidjeli u prvom dijelu rada Φ je obostrano jednoznačno i obostrano neprekidno preslikavanje proširene kompleksne ravni na samu sebe i ono preslikava skup $\sigma_e(A)$ na skup $\sigma(U)$. Stavimo

$$g(\zeta) := f(\Phi^{-1}(\zeta)) \quad (\zeta \in \Phi(\mathrm{dom}(f))). \tag{4.3}$$

Pošto $f \in \mathcal{F}(A)$ odavde slijedi da $g \in \mathcal{F}(U)$ i vrijedi jednakost

$$g(U) = f(A).$$

Odavde, na osnovu (4.1), slijedi da je U pozitibilan J-unitaran operator, pa prema teoremu 3.3. postoji pozitivirajući trigonometrijski polinom g_1 operatora U oblika

$$g_1(\zeta) = \omega \prod_{j=1}^{n} (\zeta - z_j)\left(\frac{1}{\zeta} - \frac{1}{z_{n+j}}\right) c_j \qquad (\zeta \in \mathbb{C} \cup \{\infty\},\ \omega \in \{-1,1\})$$

pri čemu je

$$z_j = z^*_{n+j} \quad (j=1,\dots,k \leqslant n), \quad |z_j| = |z_{n+j}| = 1 \quad (j=k+1,\dots,n)$$

$$c_j = \begin{cases} 1 + z_{n+j}/z_j & \text{za } z_j \neq -z_{n+j} \\ i & \text{za } z_j = -z_{n+j} \end{cases}, \quad j=1,\dots,n, \quad i^2 = -1.$$

U slučaju da $1 \in \{z_1,\dots,z_{2n}\}$ zbog $1 \notin \sigma_p(U)$, $\sigma_r(U) = \emptyset$, prema konstrukciji pozitivirajućeg trigonometrijskog polinoma g u teoremu 3.3. i prema napomeni poslije propozicije 3.19. možemo uzeti da je 1 jednostruka nula funkcije g_1 i $1 = z_{2n}$. Bez teškoća se vidi da funkcija

$$\varphi(z) := g_1(\Phi(z)) \qquad (z \in \mathbb{C} \cup \{\infty\})$$

koja je analitička u nekoj okolini tačke ∞, ima u slučaju $1 \notin \{z_1,\dots,z_{2n}\}$ oblik

$$\varphi(z) = c\,(z - z_o)^{-n}(z - \bar{z}_o)^{-n} \prod_{j=1}^{2n} (z - \zeta_j)$$

gdje je c realna konstanta i nule ζ_j, $j=1,\dots,2n$ imaju oblik

$$\zeta_j = (\bar{z}_o - z_j z_o)/(1 - z_j) = \Phi^{-1}(z_j) \qquad (j=1,\dots,2n),$$

a u slučaju $1 = z_{2n}$ ova funkcija ima oblik

$$(z) = c\,(z - z_o)^{-n}(z - \bar{z}_o)^{-n} \prod_{j=1}^{2n-1} (z - \zeta_j)$$

gdje je c ponovo realna konstanta i ζ_j, $j=1,\dots,2n-1$ dati kao i gore. Kao i maloprije vrijedi jednakost $\varphi(A) = g_1(U)$. Zato za sve $x \in \mathrm{dom}(A^{2n})$ i polinom

$$p(z) = c\prod_{j=1}^{2n}(z-\zeta_j) \quad (\text{ili } p(z) = c\prod_{j=1}^{2n-1}(z-\zeta_j))$$

vrijedi

$$[p(A)x,x]=[\varphi(A)(A-z_oI)^n x,(A-z_oI)^n x]=[g_1(U)(A-z_oI)^n x,(A-z_oI)^n x]\geqslant 0.$$

Dakle operator A je pozitibilan. Obrnuto, neka je operator A pozitibilan i neka njegov pozitivirajući polinom ima stepen m. Pošto je $\mathrm{ran}((A-zI)^{-m})=\mathrm{dom}(A^m)$ $(z\in\varrho(A))$ vrijedi

$$[p(A)(A - z_oI)^{-m}x,(A - z_oI)^{-m}x] \geqslant 0 \qquad (x\in H)$$

Takođe se lako vidi da je $(A-\bar z_oI)^{-m}p(A)x=p(A)(A-\bar z_oI)^{-m}x$, $(x\in \mathrm{dom}(A^m))$, pa vrijedi

$$[p(A)(A - \bar z_oI)^{-m} (A - z_oI)^{-m}x,x] \geqslant 0 \qquad (x\in H)$$

Očigledno da je funkcija $z \longmapsto p(z)(z - \bar z_o)^{-m}(z - z_o)^{-m}$ $(z\in \mathbb{C}\cup\{\infty\})$ analitička na okolini spektra $\sigma_e(A)$. Tako je dokazano da postoji funkcija $f \in \mathcal{F}(A)$ za koju je $[f(A)x,x]\geqslant 0$, $x\in H$. Teorem je dokazan.

Primijetimo da je u ovom teoremu dokazano da je J-hermitski operator A pozitibilan ako i samo ako je i njegova Cayle jeva transformacija pozitibilan operator. Pri tome se pozitivirajuće funkcije ovih operatora mogu odabrati tako da za njih vrijedi (4.3). Funkciju $f\in\mathcal{F}(A)$ za koju vrijedi $[f(A)x,x]\geqslant 0$, $x\in H$ nazivamo <u>pozitivirajuća funkcija</u> J-hermitskog operatora A.

PROPOZICIJA 4.2. Neka je A pozitibilan J-hermitski operator, $\rho(A) \neq \emptyset$. Spektar operatora A van realne ose sastoji se od konačno mnogo parova tačaka z, $\bar{z}$. Svaka izolovana tačka z spektra operatora A je svojstvena vrijednost sa konačnim Rieszovim indeksom $\nu(z) = \nu(\bar{z})$. Pri tome vrijedi

$$\nu(z) \leqslant \begin{cases} v(z,f) & z \neq \bar{z} \\ v(z,f) + 1 & z = \bar{z} \end{cases}$$

pri čemu je f proizvoljna pozitivirajuća funkcija operatora A. Postoji pozitivirajuća funkcija g operatora A za koju vrijedi

$$\nu(z) = v(z,g) \quad (z \neq \bar{z}) \quad \text{i} \quad v(z,g) \leqslant \nu(z) \leqslant v(z,g) + 1 \quad (z = \bar{z}),$$

z izolovana tačka spektra operatora A. Operator A je ograničen ako i samo ako je skup $\sigma(A)$ ograničen.

Dokaz. Ova propozicija slijedi iz leme 3.1., teorema 3.10., propozicija 1.37., 1.39. i 3.19. i činjenica da obostrano jednoznačno i obostrano neprekidno preslikavanje Φ iz (4.2) preslikava spektar operatora A na spektar njegove Cayle jeve transformacije U date sa (1.35), pri čemu se skup izolovanih tačaka spektra $\sigma(A)$ preslika na skup izolovanih tačaka spektra $\sigma(U)$, da preslikavanje $h \longmapsto h \circ \Phi$, $h \in \mathcal{F}(U)$ preslikava skup $\mathcal{F}(U)$ na skup $\mathcal{F}(A)$ pri čemu skup pozitivirajućih funkcija operatora U prelazi na skup pozitivirajućih funkcija operatora A i pri tom preslikavanje Φ^{-1} prevodi nule funkcije h na nule funkcije $h \circ \Phi$ zadržavajući višestrukost. Skup $\sigma(A)$ je ograničen ako i samo ako je ∞ izolovana tačka skupa $\sigma_e(A)$, a ovo je ekvivalentno sa činjenicom da je $1 (\notin \sigma_p(U))$ izolovana tačka spektra $\sigma(U)$. Ovo je prema propoziciji 3.19. nemoguće. Propozicija je dokazana.

Označimo sa $\sigma_o(A)$ dio spektra pozitibilnog J-hermitskog operatora A koji ne leži na realnoj osi. Prema prethodnoj propoziciji skup $\sigma_o(A)$ simetričan je u odnosu na realnu osu i sastoji se od konačnog broja svojstvenih vrijednosti operatora A. Neka je $E(\sigma_o(A))$ spektralni projektor koji odgovara ograničenom spektralnom skupu $\sigma_o(A)$. Prema teoremu 1.34'. i propoziciji 1.22. Kreinov prostor H može se predstaviti kao direktna J-ortogonalna suma dvaju Kreinovih prostora $H_o = E(\sigma_o(A))H$ i $H_1 = (I - E(\sigma_o(A)))H$. Oba potprostora reduciraju operator A i vrijedi $\sigma(A|H_o) = \sigma_o(A)$ i $\sigma(A|H_1) = \sigma(A)\cap\mathbb{R}$. Kao što je u primjedbi poslije leme 3.2. napomenuto za pozitibilne J-unitarne operatore, na osnovu ovoga možemo se ograničiti na proučavanje pozitibilnih J-hermitskih operatora sa spektrom na realnoj osi.

Neka je A pozitibilan J-hermitski operator, $\sigma(A)\subseteq\mathbb{R}$, pozitibilan J-unitaran operator U, $\sigma(U)\subseteq C$ Cayle-jeva transformacija operatora A, $c(U) = \{z_1,\dots,z_m\}$, $q_j=v(z_j,g)$, g pozitivirajući trigonometrijski polinom operatora U iz teorema 3.1o., Φ preslikavanje dato sa (4.2) i sa $\mathscr{C}(\sigma_e(A), \Phi^{-1}(z_j),q_j;\ j=1,\dots,m)$ označimo skup svih kompleksnih funkcija koje su definisane i neprekidne na nekoj okolini (u $\overline{\mathbb{R}}$, okolina zavisi od funkcije) skupa $\sigma_e(A)$ i koje u okolini tačke $\Phi^{-1}(z_j)$ imaju neprekidne izvode reda $\leqslant q_j$, $j=1,\dots,m$. U slučaju da $1\in\{z_1,\dots,z_m\}$, recimo $1 = z_m$, onda je $q_m = 1$ i smatramo da funkcija f, neprekidna u nekoj okolini (u $\overline{\mathbb{R}}$) tačke ∞ ima neprekidan izvod u okolini tačke ∞ ako i samo ako funkcija $s \mapsto f(\frac{1}{s})$ ima neprekidan izvod u okolini tačke nula. Sa

$$f \longmapsto f \circ \Phi^{-1} \quad (f \in \mathcal{C}(\sigma_e(A);\ \Phi^{-1}(z_j);\ q_j;\ j=1,\dots,m))$$

dato je neprekidno i obostrano jednoznačno preslikavanje sa $\mathcal{C}(\sigma_e(A);\ \Phi^{-1}(z_j);\ q_j;\ j=1,\dots,m)$ na $\mathcal{C}(\sigma(U);\ z_j,q_j;\ j=1,\dots,m)$. Homomorfizam E definisan u teoremu 3.7. u odnosu na pozitivirajući trigonometrijski polinom g operatora U iz teorema 3.lo. označimo sa E_U. Definišimo

$$E_A(f) := E_U(f \circ \Phi^{-1}).$$

Na ovaj način definisan je homomorfizam sa prostora $\mathcal{C}(\sigma_e(A), \Phi^{-1}(z_j), q_j;\ j=1,\dots,m)$ u prostor L(H) koji ima sve osobine kao i homomorfizam E_U iz teorema 3.7. Kao što smo produžili homomorfizam E_U, tako i homomorfizam E_A možemo produžiti, prvo na kompleksne funkcije Baireove prve klase koje su definisane na nekoj okolini (u $\overline{\mathbb{R}}$) spektra $\sigma_e(A)$ i u okolini tačke $\Phi^{-1}(z_j)$ imaju neprekidne izvode reda $\leqslant q_j$, $j=1,\dots,m$, a poslije i na sve kompleksne funkcije definisane na nekoj okolini (u $\overline{\mathbb{R}}$) spektra $\sigma_e(A)$, izmjerive u Borelovom smislu koje, imaju neprekidne izvode reda $\leqslant q_j$ u okolini tačke $\Phi^{-1}(z_j) = s_j$, $j=1,\dots,m$. Stavimo $c(A) = \{s_j, j=1,\dots,m\}$ i definišimo :

$$E_A(\Delta) := E_A(\chi_\Delta) = E_U(\Phi(\Delta)) \quad (\Delta \in \mathcal{A}(\overline{\mathbb{R}} \setminus c(A))) \qquad (4.4)$$

TEOREM 4.3. Preslikavanje $E_A : \Delta \longmapsto E_A(\Delta)$, $\Delta \in \mathcal{A}(\overline{\mathbb{R}} \setminus c(A))$ definisano sa (4.4) je svojstvena spektralna funkcija pozitibilnog J-hermitskog operatora A sa realnim spektrom.

Dokaz. Na osnovu teorema 3.9. očigledno je da je preslikavanje E_A J-spektralna funkcija. Dokažimo da ovo preslikavanje ima i osobine (a) i (b) iz definicije 2.4., tj. da je E_A svojstvena spektralna funkcija operatora A. Prema teoremu 1.36., pošto je i operator A Cayle jeva transformacija operatora U ($\varepsilon = 1$) vrijedi dom(A) = ran(U - I). Kako je E_U svojstvena spektralna funkcija operatora U vrijedi

$$E_U(\Phi(\Delta))(U-I) = (U-I)E_U(\Phi(\Delta)) \quad (\Delta \in \mathcal{A}(\overline{\mathbb{R}} \setminus c(A)))$$

pa i

$$E_A(\Delta)\mathrm{dom}(A) \subseteq \mathrm{dom}(A) \qquad (\Delta \in \mathcal{A}(\overline{\mathbb{R}} \setminus c(A))).$$

Koristeći jednakost (1.36) i upravo dokazanu inkluziju lako dobivamo da vrijedi i

$$E_A(\Delta)Ax = AE_A(\Delta)x \qquad (x \in \mathrm{dom}(A),\ \Delta \in \mathcal{A}(\overline{\mathbb{R}} \setminus c(A))).$$

Na osnovu ovoga lako se vidi da su operatori $A|E_A(\Delta)H$ i $U|E_U(\Phi(\Delta))H$ $(\Delta \in \mathcal{A}(\overline{\mathbb{R}} \setminus c(A)))$ Cayle jeva transformacija jedan drugog, pa vrijedi:

$$\sigma_e(A|E_A(\Delta)H) = \Phi^{-1}(\sigma(U|E_U(\Phi(\Delta))H)) \subseteq \Phi^{-1}(\mathrm{Cl}(\Phi(\Delta)))$$

Zbog neprekidnosti preslikavanja $\Phi^{-1}: C \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$ je $\Phi^{-1}(\mathrm{Cl}(\Phi(\Delta))) \subseteq \mathrm{Cl}(\Delta)$ i tako je dokazano da je

$$\sigma_e(A|E_A(\Delta)H) \subseteq \mathrm{Cl}(\Delta) \qquad (\Delta \in \mathcal{A}(\overline{\mathbb{R}} \setminus c(A))).$$

Teorem je dokazan.

Na osnovu razmatranja provedenih u dokazu teorema 4.1., leme 3.8 i teorema 3.1o. slijedi da postoji pozitivirajući polinom pozitibilnog J-hermitskog operatora A za koji vrijedi

$$N(p) \cap \sigma(A) = c(A) \setminus \{\infty\} \quad \text{i} \quad v(z,p) \leq v(z,\hat{p}) \quad (z \in c(A) \setminus \{\infty\}) \quad (4.5)$$

gdje je $\hat{p}$ proizvoljan pozitivirajući polinom operatora A. Stepen polinoma p je paran ako $\infty \notin c(A)$, a neparan ako $\infty \in c(A)$. U daljem stavljamo $c(A) = \{s_1,\ldots,s_m\}$ i uvijek smatramo da je $s_m = \infty$ ako $\infty \in c(A)$. Takođe stavljamo $m' := m$ ako $\infty \notin c(A)$ i $m' := m-1$ ako $\infty \in c(A)$.

Dokažimo sada teorem analogan sa teoremom 3.11.

TEOREM 4.4. Neka je A pozitibilan J-hermitski operator sa realnim spektrom, E_A svojstvena spektralna funkcija operatora A, odnosno homomorfizam definisan prije teorema 4.3., $c(A) = \{s_1,\ldots,s_m\}$ i $q_j = v(s_j,p)$, $j=1,\ldots,m'$ gdje je p pozitivirajući polinom operatora A sa osobinom (4.5). Tada vrijedi

$$E_A(f) = \int_{\mathbb{R}} f(s)\, dE_A(s) + \sum_{j=1}^{m'} f^{(q_j)}(s_j) N_j^{\wedge}, \qquad (4.6)$$

pri čemu je funkcija f iz područja definicije homomorfizma E_A i $f^{(k)}(s_j) = 0$, $k=0,1,\ldots,q_j-1$, $j=1,\ldots,m$. U jednakosti (4.6) integral sa desne strane postoji kao nesvojstveni integral u jakoj konvergenciji operatora sa skupom singulariteta $\{s_1,\ldots,s_{m'}\}$ i J-hermitski operatori (tačnije J-pozitivni ili J-negativni operatori) $N_j^{\wedge}$, $j=1,\ldots,m'$ zadovoljavaju jednakosti

$$N_j^{\wedge} N_k^{\wedge} = 0, \qquad N_j^{\wedge}\, E_A(h) = E_A(h) N_j^{\wedge} = 0 \qquad (j,k=1,\ldots,m'),$$

gdje je h funkcija iz područja definicije honomorfizma E_A i $h(s_j) = 0$.

Dokaz. Kao i do sada u ovom dijelu U je Cayle jeva transformacija operatora A pomoću koje smo

i definisali homomorfizam E_{A}. Pošto tačka ∞ igra specifičnu ulogu u skupu $\overline{\mathbb{R}}$ proučićemo tačku $1 \in C$.
Neka je $1 \in c(U)$. Tada zbog $1 \notin \sigma_p(U)$ mora biti $1 \in \sigma_c(U)$, i zbog toga prema teoremu 3.15. $W_1 = \{0\}$. Kao i prije stavljamo $c(U) = \{z_1, \dots, z_m\}$ i u slučaju $1 \in c(U)$ smatramo da je $z_m = 1$. Neka je sada $(\Delta_{km})_k$ niz skupova iz $\mathcal{A}(C \setminus c(U))$ koji smo koristili u dokazu teorema 3.11. Pošto za ovaj niz vrijedi $\Delta_{km} \cap c(U) = \{1\}$ za dovoljno velike k i $\bigcap_k \Delta_{km} = \{1\}$, zbog $W_1 = \{0\}$, vrijedi $\bigcap_k E_U(\Delta_{km})H = \{0\}$. Pošto je $\Delta_{k+1,m} \subseteq \Delta_{km}$, $k=1,2,\dots$ vrijedi i $E_U(\Delta_{k+1,m})H \subseteq E_U(\Delta_{km})H$. Po definiciji iz dokaza teorema 3.11. je

$$N_m x = (g'(1))^{-1} \lim_{k\to\infty} g(U)E_U(\Delta_{km})x \qquad (x \in H),$$

pa koristeći inkluziju iz prethodne rečenice zaključujemo da je

$$N_m x \in E_U(\Delta_{km})H \qquad (x \in H,\ k=1,2,\dots).$$

Odavde slijedi da je $N_m x = 0$ $(x \in H)$ tj. $N_m = 0$. Primijetimo da je ovdje korišteno samo da je $1 \in \sigma_c(U)$, tj. $W_1 = \{0\}$.

U slučaju da $1 \notin c(U)$ za proizvoljan niz (Δ_k), $\Delta_k \in \mathcal{A}(C \setminus c(U))$ za koji je $\Delta_{k+1} \subseteq \Delta_k$, $k=1,2,\dots$, $\bigcap \Delta_k = \{1\}$ vrijedi

$$\lim_{k\to\infty} E_U(\Delta_k) = E_U(\{1\}) = 0 \qquad (4.7)$$

U slučaju da $1 \notin \sigma(U)$ ovo je očigledno, a u slučaju da $1 \in \sigma_c(U) \setminus c(U)$ ovo slijedi iz činjenice da je 1 tačka definitnog tipa iz nosača J-spektralne funkcije E_U, pa postoji skup $\Delta_0 \in \mathcal{A}(C \setminus c(U))$, $1 \in \Delta_0$ takav da je prostor $(E(\Delta_0)H, |[\cdot,\cdot]|)$ Hilbertov prostor. Na osnovu ovoga lako se vidi da u svakom slučaju vrijedi

$$\int_C h(z)\, dE_U(z) = \lim_{k\to\infty} \int_{C\setminus\Delta_k} h(z)\, dE_U(z),$$

pri čemu integral sa lijeve strane ove jednakosti postoji kao nesvojstveni integral u jakoj konvergenciji operatora sa skupom singulariteta $c(U)$, (Δ_k) je proizvoljan niz skupova iz $\mathcal{A}(C\setminus c(U))$ za koji je $\bigcap \Delta_k=\{1\}$ i limes se uzima u jakoj konvergenciji operatora. Primijetimo da svaki od integrala sa desne strane posljednje jednakosti postoji kao nesvojstveni integral u jakoj konvergenciji operatora sa skupom singulariteta $c(U)$. Naime u slučaju da $1\in c(U)$ ovo slijedi iz definicije nesvojstvenog integrala, a u slučaju da $1\notin c(U)$ koristimo jednakost (4.7). Koristeći upravo dokazanu jednakost, smjenu promjenljive u integralu u odnosu na operatorsku mjeru i teorem 3.11. za funkciju $f\in \mathrm{dom}(E_A)$, $f^{(k)}(s_j) = 0$, $k=0,1,\dots,q_j-1$, $j=1,\dots,m$ dobijamo da je

$$E_A(f)=E_U(f\circ\Phi^{-1})= \int_C (f\circ\Phi^{-1})(z)\, dE_U(z)+\sum_{j=1}^{m} (f\circ\Phi^{-1})^{(q_j)}(z_j)N_j =$$

$$=\lim_{k\to\infty} \int_{C\setminus\Delta_k} (f\circ\Phi^{-1})(z)dE_U(z) + \sum_{j=1}^{m}(f\circ\Phi^{-1})^{(q_j)}(z_j)N_j =$$

$$=\lim_{k\to\infty} \int_{\mathbb{R}\setminus\Phi^{-1}(\Delta_k)} f(s)dE_A(s) + \sum_{j=1}^{m'} f^{(q_j)}(s_j)(-1)^{q_j} \frac{(s_j-z_o)^{q_j+1}}{z_o-\bar{z}_o} N_j=$$

$$= \int_{\mathbb{R}} f(s)dE_A(s) + \sum_{j=1}^{m'} f^{(q_j)}(s_j)N_j^{\wedge}$$

pri tome je stavljeno $N_j^{\wedge} = (-1)^{q_j} \dfrac{(s_j- z_o)^{q_j+1}}{z - \bar{z}o} N_j$,

$j=1,\dots,m'$, svi limesi su uzeti u jakoj konvergenciji operatora i svi integrali postoje kao nesvojstveni integrali u jakoj konvergenciji operatora. Po definiciji je

$$\int_{\mathbb{R}} f(s)\, dE_A(s) := \lim_{k\to\infty} \int_{\bar{\mathbb{R}}\setminus\Delta'_k} f(s)\, dE_A(s) \qquad (4.8)$$

kada limes sa desne strane postoji u jakoj konvergenciji operatora i nezavisan je od izbora niza (Δ'_k), $\Delta'_k \in \mathcal{A}(\bar{\mathbb{R}}\setminus c(A))$, $\Delta'_{k+1} \subseteq \Delta'_k$, $k=1,2,\ldots$ i $\bigcap \Delta'_k = \{\infty\}$ i gornji niz jednakosti predstavlja dokaz da integral sa lijeve strane u (4.8) postoji kao nesvojstveni integral u jakoj konvergenciji operatora sa skupom singulariteta $\{s_1,\ldots,s_{m'}\}$. Da operatori $N^{\wedge}_j$, $j=1,\ldots,m'$, zadovoljavaju navedene jednakosti slijedi iz odgovarajućih jednakosti za operatore N_j, $j=1,\ldots,m'$ u teoremu 3.11. Teorem je dokazan.

Napomenimo da iz definicije operatora $N^{\wedge}_j$ (vidjeti napomenu poslije teorema 3.11.) slijedi da je $\mathrm{ran}(N^{\wedge}_j) \subseteq \mathrm{Cl}(\mathrm{ran}(f(A)))$, $j=1,\ldots,m'$, gdje je f pozitivirajuća funkcija operatora A za koju vrijede relacije analogne sa (4.5). Pošto vrijedi $f(A)\,N^{\wedge}_j = 0$ imamo da je i $\mathrm{ran}(N^{\wedge}_j) \subseteq \ker(f(A))$, $j=1,\ldots,m'$ pa je očigledno da je $N^{\wedge}_j = 0$, $j=1,\ldots,m'$, ako je $\mathrm{Cl}(\mathrm{ran}(f(A))) \subseteq \ker(f(A)) = \{0\}$. Ovu činjenocu iskoristićemo u jednom od sljedećih korolara.

KOROLAR 4.5 Neka je pozitivirajući polinom pozitibilnog J-hermitskog operatora A prvog stepena: $p(s) = c(s-a)$ $(c\neq 0, a, s\in\mathbb{R})$ i neka je E_A svojstvena spektralna funkcija operatora A. Tada vrijedi

$$Ax = ax + \int_{\mathbb{R}} (s-a)\, dE_A(s)x + N^{\wedge}x \quad (x\in\mathrm{dom}(A^2)), \qquad (4.9)$$

pri čemu je $N^\wedge$ operator iz teorema 4.4. koji odgovara kritičnoj tački a operatora A.

Dokaz. Na osnovu propozicije 4.2. slijedi da je spektar operatora A realan. Stavimo $z_o = a + i$. Tada je $z_o \in \varrho(A)$ i funkcija

$$f(z) = c(z-a)(z-z_o)^{-1}(z-\bar{z}_o)^{-1} \quad (z \in \mathbb{C} \setminus \{z_o, \bar{z}_o\})$$

je pozitivirajuća funkcija operatora A, pa prema teoremu 4.4. vrijedi

$$(A-aI)(A-z_oI)^{-1}(A-\bar{z}_oI)^{-1}y = \int_{\mathbb{R}} \frac{s-a}{(s-z_o)(s-\bar{z}_o)} dE_A(s)y + N^\wedge y \quad (y \in H).$$

Ako stavimo

$$x = (A - z_oI)^{-1}(A - \bar{z}_oI)^{-1}y \in \mathrm{dom}(A^2),$$

zbog

$$E_A(\Delta)x = \int_{\Delta} (s - z_o)^{-1}(s - \bar{z}_o)^{-1} dE_A(s)y$$

imamo da je ([4] Korolar III.1o.6.)

$$\int_{\mathbb{R}} \frac{s - a}{(s-z_o)(s-\bar{z}_o)} dE_A(s)y = \int_{\mathbb{R}} (s - a)dE_A(s)x$$

i

$$N^\wedge y = N^\wedge(A - z_oI)(A - \bar{z}_oI)x = N^\wedge(A^2 - 2aA + a^2I + I)x =$$

$$= N^\wedge(A - aI)^2x + N^\wedge x = N^\wedge x$$

Dakle vrijedi

$$(A - aI)x = \int_{\mathbb{R}} (s - a)dE_A(s)x + N^\wedge x.$$

Pošto je $\mathrm{ran}((A - z_o I)^{-1}(A - \bar{z}_o I)^{-1}) = \mathrm{dom}(A^2)$ ovim je korolar dokazan.

KOROLAR 4.6. Neka je A operator iz korolara 4.5. i neka vrijedi

$$\mathrm{Cl}(\mathrm{ran}(A - aI)) \cap \ker(A - aI) = \{0\}.$$

Tada jednakost (4.9) prelazi u

$$Ax = ax + \int_{\mathbb{R}} (s - a)\, dE_A(s)x \qquad (x \in \mathrm{dom}(A^2)).$$

Dokaz. Zadržavamo oznake iz prethodnog korolara. Neka je $x \in \mathrm{dom}(A^2)$. Tada je $x = (A - z_o I)^{-1}(A - \bar{z}_o I)^{-1}y$ za neko $y \in H$, pa je $f(A)x = c(A - aI)y$. Na osnovu napomene poslije teorema 4.4. odnosno definicije operatora $N^\wedge$ odavde slijedi da je

$$N^\wedge x \in \mathrm{Cl}(\mathrm{ran}(A - aI)).$$

S druge strane je očigledno da je $N^\wedge x \in \ker(A - aI)$, jer je $N^\wedge x \in \ker(f(A))$. Dakle vrijedi $N^\wedge x = 0$ čim je $x \in \mathrm{dom}(A^2)$. Time je korolar dokazan.

Napomenimo da je pretpostavka korolara 4.6. zadovoljena u slučaju da je $a \in \sigma_c(A)$. Na osnovu definicije J-spektralne funkcije E_A, napomene poslije propozicije 1.37. i jednakosti (1.39) vrijedi teorem analogan teoremu 3.15.

TEOREM 4.7. Neka je A pozitibilan J-hermitski operator sa realnim spektrom, neka je t kritična tačka operatora A, $t \neq \infty$, i W_t potprostor definisan u drugom dijelu ovog rada u odnosu na svojstvenu spektralnu funkciju E_A operatora A. Tada se potprostor W_t podudara sa korjenim potprostorom H_t operatora A. Pored toga vrijedi

$$(tI - A)^{n+1}(W_t) = 0 ,$$

pri čemu je $n = v(t,p)$, p pozitivirajući polinom operatora A sa osobinom (4.5). Ako je ∞ kritična tačka operatora A onda je $W_\infty = \{0\}$.

KOROLAR 4.8. Neka je t kritična tačka operatora A iz prethodnog teorema. Tada je $t \in \sigma_p(A)$ ako i samo ako je $W_t = \{0\}$.

KOROLAR 4.9. Ako u jednoj okolini kritične tačke t leže tačke samo jednog tipa definitnosti iz $\mathrm{supp}(E_A)\setminus\{t\}$ tada je $t \in \sigma_p(A)$.

KOROLAR 4.1o. Ako neka pozitivirajuća funkcija operatora A ima u kritičnoj tački t nulu parnog reda onda je $t \in \sigma_p(A)$.

KOROLAR 4.11. Ako u jednoj okolini tačke ∞ leže tačke samo jednog tipa definitnosti iz supp(A) tada ∞ nije kritična tačka za operator A.

V. INVARIJANTNI POTPROSTORI OGRANIČENIH POZITIBILNIH J-HERMITSKIH OPERATORA

Dokažimo najprije dvije leme.

LEMA 5.1. Neka je N_o neutralan zatvoren potprostor Kreinovog prostora H. Tada je prostor $N_o^{\perp}/ N_o$ shvaćen kao potprostor $H^{\wedge}$ prostora H, također Kreinov prostor sa indefinitnim skalarnim produktom $[\cdot,\cdot]$ i definitnim skalarnim produktom $(\cdot,\cdot)$, tj. sa istim skalarnim produktima kao i polazni prostor H.

Dokaz. Prema pretpostavci je $N_o \subseteq \mathcal{P}_o$, pa su potprostori N_o i JN_o međusobno ortogonalni i očigledno vrijedi

$$N_o(\dot{+})JN_o = P_+N_o(\dot{+})P_-N_o \tag{5.1}$$

Potprostor $N_o^{\perp}\,(= (JN_o)^{(\perp)})$ je ortogonalni komplement zatvorenog potprostora JN_o, pa sadrži potprostor N_o i prostor $N_o^{\perp}/ N_o$ je izomorfan, kao Hilbertov prostor, sa ortogonalnim komplementom zatvorenog potprostora N_o u Hilbertovom prostoru $(N_o^{\perp}, (\cdot,\cdot))$, tj. sa potprostorom

$$N_o^{(\perp)} \cap (JN_o)^{(\perp)} = (N_o + JN_o)^{(\perp)} = (N_o + JN_o)^{\perp} .$$

Posljednji potprostor je zbog (5.1), prema teoremu 1.16. (iii) Kreinov prostor sa indefinitnim skalarnim produktom $[\cdot\,,\cdot]$ i pošto je ovaj potprostor invarijantan u odnosu na involuciju J za definitni skalarni produkt u tom Kreinovom prostoru možemo uzeti produkt $(\cdot,\cdot)$ iz polaznog prostora H. Na prostoru $N_o^{\perp}/ N_o$ može se dobro definisati skalarni produkt $[\cdot,\cdot]$ i on je invarijantan u odnosu na gornji izomorfizam prostora $N_o^{\perp}/N_o$ i prostora $(N_o + JN_o)^{\perp}$, tako da je prostor $N_o^{\perp}/N_o$ takođe Kreinov prostor sa indefinitnim skalarnim produktom $[\cdot,\cdot]$ i može biti shvaćen kao potprostor prostora H. Time je lema dokazana.

Neka je sada N_o ponovo neutralan zatvoren potprostor prostora H. Ako je F zatvoren potprostor prostora N_o stavljamo

$$F^{\dot{\perp}} := F^{\perp} \cap N_o^{\perp} .$$

Tada vrijedi

$$(F^{\dot{\perp}})^{\dot{\perp}} = Cl(F + N_o) \tag{5.2}$$

Stvarno, po definiciji je

$$(F^{\dot{\perp}})^{\dot{\perp}} = (F^{\perp} \cap N_o^{\perp})^{\perp} \cap N_o^{\perp} = Cl(F + N_o) \cap N_o^{\perp} .$$

Kao što smo vidjeli u prethodnoj lemi vrijedi $N_o \subseteq N_o^{\perp}$, a po pretpostavci je $F \subseteq N_o^{\perp}$, pa je i $N_o + F \subseteq N_o^{\perp}$. Pošto je $N_o^{\perp}$ zatvoren potprostor jasno je da je $Cl(F + N_o) \subseteq N_o^{\perp}$. Time je jednakost (5.2) dokazana.

LEMA 5.2. Neka je $\mathcal{H}$ komutativna familija ograničenih J-hermitskih operatora definisanih na Kreinovom prostoru H, N neutralan zatvoren potprostor prostora H koji je invarijantan u odnosu na sve operatore iz familije $\mathcal{H}$: $AN \subseteq N$ $(A \in \mathcal{H})$. Tada postoji zatvoren potprostor N_o prostora H sa sljedećim osobinama

1) $N \subseteq N_o \subseteq \mathcal{P}_o$
2) $AN_o \subseteq N_o$ $\quad (A \in \mathcal{H})$
3) $Cl(A(N_o^{\perp}) + N_o) \cap (A(N_o^{\perp}))^{\perp} \subseteq N_o$ $\quad (A \in \mathcal{H})$

Dokaz. Posmatrajmo familiju svih neutralnih zatvorenih potprostora prostora H koji su invarijantni u odnosu na operatore iz familije $\mathcal{H}$. Ova familija je parcijalno uređena inkluzijom i pri tome svaki lanac ima maksimalan element, i to zatvorenje unije svojih članova. Prema Zornovoj lemi ova familija ima maksimalan element N_o koji sadrži potprostor N iz leme. Ostaje da se dokaže da ovaj potprostor N_o ima osobinu 3).

Za proizvoljan operator $A_o \in \mathcal{H}$ posmatrajmo skup

$$F_o = Cl(A_o(N_o^{\perp}) + N_o) \cap (A_o(N_o^{\perp}))^{\perp}.$$

Pošto je operator A_o J-hermitski iz $A_oN_o \subseteq N_o$ slijedi $A_o(N_o^{\perp}) \subseteq N_o^{\perp}$. Pored toga vrijedi $N_o \subseteq N_o^{\perp}$, pa zaključujemo da je

$$Cl(A_o(N_o^{\perp}) + N_o) \subseteq N_o^{\perp},$$

dakle

$$F_o \subseteq N_o^{\perp}. \tag{5.3}$$

Prema jednakosti (5.2) vrijedi

$$Cl(A_o(N_o^{\perp}) + N_o) = (A_o(N_o^{\perp}))^{\dot{\perp}\dot{\perp}}$$

(gdje $\dot{\perp}$ označava, kao i prije J-ortogonalni komplement u odnosu na potprostor $N_o^{\perp}$) pa je

$$F_o = (A_o(N_o^{\perp}))^{\dot{\perp}\dot{\perp}} \cap (A(N_o^{\perp}))^{\dot{\perp}},$$

odakle slijedi

$$F_o \subseteq \mathfrak{P}_o. \tag{5.4}$$

Iz inkluzija (5.3) i (5.4) neposredno slijedi da je potprostor $Cl(F_o + N_o)$ neutralan i da sadrži potprostor N_o. Za proizvoljan operator A iz $\mathcal{H}$ zbog $AN_o \subseteq N_o$ vrijedi i $A(N_o^{\perp}) \subseteq N_o^{\perp}$, ali i $A(A_o(N_o)) = A_o(A(N_o^{\perp})) \subseteq A_o(N_o^{\perp})$ pa je i potprostor F_o invarijantan u odnosu na A. Dakle potprostor $Cl(F_o + N_o)$ je invarijantan za operatore iz $\mathcal{H}$. Pošto je N_o maksimalan potprostor sa ovim osobinama odavde slijedi $F_o \subseteq N_o$, a to je upravo trebalo dokazati. Tako je lema dokazana.

TEOREM 5.3. Neka je $\mathcal{H}$ komutativna familija ograničenih J-hermitskih operatora i neka za svaki operator A iz $\mathcal{H}$ postoji prirodan broj n(A) takav da je jedan od operatora $\pm A^{n(A)}$ J-pozitivan operator. Tada postoji maksimalan pozitivan potprostor koji je invarijantan u odnosu na sve operatore A iz $\mathcal{H}$.

Dokaz. Prema lemi 5.2. postoji zatvoren neutralan potprostor N_o prostora H sa osobinama $AN_o \subseteq N_o$ i

$$Cl(A(N_o^{\perp}) + N_o) \cap (A(N_o^{\perp}))^{\perp} \subseteq N_o \qquad (A \in \mathcal{H}). \qquad (5.5)$$

Dovoljno je u lemi 5.2. uzeti $N = \{0\}$. Prema lemi 5.1. faktorski prostor $N_o^{\perp}/N_o$ koji shvatamo kao potprostor $H^{\wedge}$ prostora H je Kreinov prostor u odnosu na skalarne produkte inducirane sa H. Pošto proizvoljan operator A iz $\mathcal{H}$ ostavlja invarijantnim potprostore N_o i $N_o^{\perp}$ on inducira operator $A^{\wedge}$ na $H^{\wedge}$ pomoću jednakosti $A^{\wedge}(\hat{x}) = (Ax)^{\wedge}$, pri tome $\hat{x}$ označava element iz $H^{\wedge}$ koji je pri faktorskom preslikavanju pridružen elementu x iz N_o. Ovo preslikavanje je dobro definisano jer ako je $\hat{x} = \hat{y}$, $x, y \in N_o$, onda je $x - y \in N_o$ pa je i $Ax - Ay \in N_o$, tj. $(Ax)^{\wedge} = (Ay)^{\wedge}$. $A^{\wedge}$ je preslikavanje sa $H^{\wedge}$ u $H^{\wedge}$.

Ovako definisani operatori $A^{\wedge}$ $(A \in \mathcal{H})$ su J-hermitski jer vrijedi $[A^{\wedge}\hat{x}, \hat{y}] = [(Ax)^{\wedge}, \hat{y}] = [Ax, y]$. Kod definicije operatora $A^{\wedge}$ bilo nam je važno samo da su potprostori $N_o^{\perp}$ i N_o invarijantni za operator A. Pošto su za svaki prirodan broj n potprostori $N_o^{\perp}$ i N_o invarijantni za operatore A^n $(A \in \mathcal{H})$ možemo definisati i operator $(A^n)^{\wedge}$. Očigledno vrijedi $(A^n)^{\wedge} = (A^{\wedge})^n$, n proizvoljan prirodan broj i A iz $\mathcal{H}$. Sada se lako vidi da je za prirodan broj $n(A^{\wedge}) = n(A)$ jedan od operatora $\pm (A^{\wedge})^{n(A^{\wedge})}$ J-pozitivan. Dokažimo sada da vrijede jednakosti

$$\mathrm{Cl}(\mathrm{ran}(A^{\wedge})+\ker(A^{\wedge}))=H \quad \text{tj.} \quad \mathrm{ran}(A^{\wedge})^{\perp} \cap \ker(A^{\wedge})^{\perp} = \{0\} \tag{5.6}$$

Neka je $\hat{x}_o$ element iz $\mathrm{ran}(A^{\wedge})^{\perp} \cap \ker(A^{\wedge})^{\perp}$. Zbog $\hat{x}_o \in \mathrm{ran}(A^{\wedge})$ vrijedi $[\hat{x}_o, (Ay)^{\wedge}] = 0$, tj. $[x_o, Ay] = 0$ za sve y iz $N_o^{\perp}$, gdje je x_o proizvoljan element iz $N_o^{\perp}$ koji se pri kvocijentnom preslikavanju $N_o^{\perp} \to N_o^{\perp}/N_o$ preslikava na $\hat{x}_o$. Dakle $x_o \in (A(N_o^{\perp}))^{\dot{\perp}}$, gdje $\dot{\perp}$ znači što i prije ovog teorema. Dalje je $\hat{x}_o \in \ker(A^{\wedge})^{\perp}$ ekvivalentno sa $[\hat{x}_o, \hat{y}] = 0$ za sve $\hat{y}$ za koje je $A^{\wedge}\hat{y} = 0$, tj. $[x_o, y] = 0$ za sve $y \in N_o^{\perp}$ za koje je $Ay \in N_o$. Uvedimo oznaku

$$A^{-1}(N_o) := \{y \in N_o^{\perp} : Ay \in N_o\}.$$

Prema prethodnim razmatranjima vrijedi dakle $x_o \perp A^{-1}(N_o)$. Dokažimo da vrijedi

$$A^{-1}(N_o) = (A(N_o^{\perp}))^{\dot{\perp}}. \tag{5.7}$$

Vrijedi naime $y \in (A(N_o^{\perp}))^{\dot{\perp}}$ akko je $y \in N_o^{\perp}$ i $[A(N_o^{\perp}), y] = \{0\}$, a ovo je ekvivalentno sa $Ay \in N_o^{\perp\perp} = N_o$,

$y \in N_0^{\perp}$ tj. sa $y \in A^{-1}(N_0)$. Iz jednakosti (5.7) slijedi

$$(A^{-1}(N_0))^{\perp} = (A(N_0^{\perp}))^{\perp\perp},$$

a odavde je prema (5.2)

$$(A^{-1}(N_0))^{\perp} = Cl(A(N_0^{\perp}) + N_0).$$

Već smo dokazali da $x_0 \in (A(N_0^{\perp}))^{\perp}$ i da je $x_0 (\in N_0^{\perp})$ J-ortogonalan na potprostor $A^{-1}(N_0)$, pa posljednja jednakost i (5.5) povlače da je $x_0 \in N_0$, tj. $\hat{x}_0 = 0$, a to smo i trebali dokazati.

Neka je sada $n = n(A) \geqslant 3$, pri čemu je $n(A)$, $A \in \mathcal{H}$, prirodan broj za koji je jedan od operatora $\pm(A^\wedge)^{n(A)}$ J-pozitivan. Pošto je operator $A^\wedge$ J-hermitski za $\hat{y}$ iz i $\hat{z}$ iz $\ker(A^\wedge)$ vrijedi

$$\left[(A^\wedge)^{n-2}(A^\wedge\hat{y} + \hat{z}), A^\wedge\hat{y} + \hat{z}\right] = \left[(A^\wedge)^n \hat{y}, \hat{y}\right],$$

pa je na osnovu jednakosti (5.6) jedan od operatora $\pm(A^\wedge)^{n-2}$ J-pozitivan. Ponavljajući eventualno ovo razmatranje dalje zaključujemo da je za svaki operator A iz $\mathcal{H}$ jedan od operatora $\pm A^\wedge$ ili $\pm (A^\wedge)^2$ J-pozitivan, zavisno od toga da li je eksponent $n(A)$ neparan ili paran.

Za maksimalan pozitivan potprostor $M^\wedge$ prostora $H^\wedge$ potprostor $M = M^\wedge + N_0$ je maksimalan pozitivan potprostor prostora H. Naime na osnovu teorema 1.7., jednakosti (5.1) i dokaza leme 5.1. vrijedi $P_+M^\wedge = H_+(-)P_+N_0$, gdje $H_+(-)P_+N_0$ označava ortogonalni (i J-ortogonalni) komplement zatvorenog potprostora P_+N_0 u H_+. Sada je $P_+M = P_+(M^\wedge + N_0) = H_+(-)P_+N_0 + P_+N_0 = H_+$ pa je prema teoremu 1.7. M maksimalan pozitivan potprostor prostora H. Ako je pri tom potprostor $M^{\wedge}$ invarijantan u odnosu na sve operatore $A^{\wedge}$, A iz $\mathcal{H}$, onda se lako vidi da je potprostor M invarijantan u odnosu na sve operatore A iz $\mathcal{H}$. Dakle ovaj teorem biće dokazan ako dokažemo tačnost sljedeće tvrdnje:

TVRDNJA: Neka je $\mathcal{K}$ komutativna familija ograničenih J-hermitskih operatora A sa osobinom

$$\mathrm{Cl}(\mathrm{ran}(A)+\ker(A))=H, \text{ tj. } \mathrm{Cl}(\mathrm{ran}(A))\cap\ker(A)=\{0\} \tag{5.8}$$

i za svaki operator A iz $\mathcal{K}$ jedan od operatora A, A^2, $-A^2$ je J-pozitivan. Tada postoji maksimalan pozitivan potprostor M Kreinovog prostora H koji je invarijantan za sve operatore iz $\mathcal{K}$.

Dokaz tvrdnje. Neka u daljem $\mathcal{K}_1$, $\mathcal{G}$ i $\mathcal{V}$ označavaju, respektivno, skupove onih operatora $A\in\mathcal{K}$ za koje su operatori A, A^2, $-A^2$ J-pozitivni. Zbog jednakosti (5.8) prema korolaru 4.6. za svaki operator A iz $\mathcal{K}_1$ vrijedi prikaz

$$A = \int_{\mathbb{R}} s\, dE_A(s) \tag{5.9}$$

pri čemu je E_A svojstvena spektralna funkcija operatora A i integral sa lijeve strane postoji kao nesvojstveni integral u jakoj konvergenciji operatora sa singularnom tačkom u nuli. Nula je jedina kritična tačka operatora A, $A\in\mathcal{K}_1$, pa je nula i jedina kritična tačka J-spektralne funkcije E_A, $A\in\mathcal{K}_1$. Na osnovu definicije svojstvene spektralne funkcije J-hermitskog operatora za operatore A i A′ iz $\mathcal{K}_1$ J-hermitske projekcije $E_A(\Delta)$ i $E_{A'}(\Delta')$ ($\Delta,\Delta'\in\mathcal{A}(\mathbb{R}\setminus\{0\})$) komutiraju. Pored toga vrijedi $E_A(\Delta)\,E_{A'}(\Delta')=0$ čim je $\Delta\subseteq(-\infty,0)$, a $\Delta'\subseteq(0,+\infty)$. Stvarno, potprostor $E_A(\Delta)H$ je zbog (3.1o′)

negativan, a kako je on i J-ortogonalno dopunjiv prema korolaru 1.17., i uniformno negativan. Potprostor $E_{A'}(\Delta')H$ je uniformno pozitivan, pa je presjek potprostora $E_A(\Delta)H$ i $E_{A'}(\Delta')H$ samo nula vektor. Definišimo sada

$$W^+ := \text{c.l.s.}\{E_A(\Delta)H:\ A\in\mathcal{K}_1,\ \Delta\in\mathcal{A}(\overline{\mathbb{R}}\setminus\{0\}),\ \Delta\subseteq(0,+\infty)\}$$
$$W^- := \text{c.l.s.}\{E_A(\Delta)H:\ A\in\mathcal{K}_1,\ \Delta\in\mathcal{A}(\overline{\mathbb{R}}\setminus\{0\}),\ \Delta\subseteq(-\infty,0)\}$$

Na osnovu gornjih primjedbi i leme 1.23. slijedi

$$W^+\subseteq\mathcal{P}_+,\qquad W^-\subseteq\mathcal{P}_-\qquad \text{i}\qquad W^+\perp W^- \tag{5.10}$$

Dokažimo sada inkluziju:

$$A((W^-)^\perp)\subseteq W^+\qquad (A\in\mathcal{K}_1)$$

Za $x\in(W^-)^\perp$ je $E_A(\Delta)x=0$ $(A\in\mathcal{K}_1,\ \Delta\in\mathcal{A}(\overline{\mathbb{R}}\setminus\{0\}),$ $\Delta\subseteq(-\infty,0))$, pa prema (5.9) vrijedi

$$Ax=\int_{\mathbb{R}} s\,dE_A(s)x=\int_0^\infty s\,dE_A(s)x=\lim_{\varepsilon\downarrow 0}\int_\varepsilon^\infty s\,dE_A(s)x=$$
$$=\lim_{\varepsilon\downarrow 0}E((\varepsilon,\infty))Ax\in W^+$$

Na kraju stavimo

$$F_+ = W^+ + \text{l.s.}\{\text{Cl}(\text{ran}(T)):\ T\in\mathcal{T}\}$$
$$F_- = W^- + \text{l.s.}\{\text{Cl}(\text{ran}(V)):\ V\in\mathcal{V}\}.$$

Dokazaćemo da su potprostori F_+ i F_- međusobno J-ortogonalni. S obzirom na (5.10) trebamo još da dokažemo relacije

$$\text{Cl}(\text{ran}(T))\perp W^-,\ \text{Cl}(\text{ran}(V))\perp W^+,\ \text{Cl}(\text{ran}(T))\perp\text{Cl}(\text{ran}(V)) \tag{5.11}$$

za $T\in\mathcal{T}$ i $V\in\mathcal{V}$. Iz jednakosti (5.8) bez teškoća se dobije da vrijedi

$$\mathrm{Cl}(\mathrm{ran}(V^2))=\mathrm{Cl}(\mathrm{ran}(V)),\ \mathrm{Cl}(\mathrm{ran}(T^2))=\mathrm{Cl}(\mathrm{ran}(T))\quad (V\in\mathcal{V},\ T\in\mathcal{T}).$$

Za $x\in H$, $T\in\mathcal{T}$ i $V\in\mathcal{V}$ vrijedi

$$0\leqslant[T^2Vx,Vx]=[VTx,VTx]=[V^2Tx,Tx]\leqslant 0,$$

tj. $[T^2Vx,Vx]=0$. Koristeći SChwarzovu nejednakost (1.28) odavde dobijamo da je $[V^2Tx,Ty]=[V^2x,T^2y]=0$. Tako smo dokazali treću relaciju u (5.11). Na sličan način dokažu se i ostale dvije relacije iz (5.11).

Da bi na potprostore F_+ i F_- mogli primijeniti teorem 1.11. i tako dobiti maksimalan pozitivan potprostor prostora H za koji ćemo pokazati da je invarijantan za sve A iz $\mathcal{K}$ dokažimo još da vrijedi

$$F_+\subseteq\mathcal{P}_+\qquad\text{i}\qquad F_-\subseteq\mathcal{P}_-\,.$$

Da bi, na primjer, dokazali drugu od ovih inkluzija dovoljno je da za proizvoljan konačan broj operatora $V_1,\dots,V_m$ iz $\mathcal{V}$ dokažemo da vrijedi

$$\begin{aligned}&\mathrm{l.s.}\{E_A(\Delta)H:\ A\in\mathcal{K}_1,\ \Delta\in\mathcal{A}(\bar{\mathbb{R}}\setminus\{0\}),\Delta\subseteq(-\infty,0)\}+\\&\quad+\mathrm{l.s.}\{\mathrm{ran}(V_j):\ j=1,\dots,m\}\subseteq\mathcal{P}_-\,,\end{aligned}\tag{5.12}$$

jer je unija svih skupova koji se pojavljuju sa lijeve strane posljednje inkluzije gust skup u F_-. Neka inkluzija (5.12) vrijedi za sve $m\leqslant m_0$. Posmatrajmo proizvoljan element

$$z=\sum_{j=1}^{n}E_jx_j+\sum_{k=1}^{m_0+1}V_ky_k\ ,$$

pri čemu je $E_j = E_{A_j}(\Delta_j)$ $(A_j \in \mathcal{K}_1,\ \Delta_j \in \mathcal{A}(\overline{\mathbb{R}}\setminus\{0\}),$ $\Delta_j \subseteq (-\infty, 0),\ j=1,\dots,n)$, $V_1,\dots,V_{m_o+1}$ su operatori iz $\mathcal{V}$, $x_j,\ y_k \in H$, $j=1,\dots,n$, $k=1,\dots,m_o+1$. Na osnovu pretpostavke (5.8) postoje nizovi $(x_j^{(\nu)})_\nu$ i $(y_k^{(\nu)})_\nu$ za koje je

$$x_j^{(\nu)} = V_{m_o+1}(x_{j1}^{(\nu)}) + x_{j2}^{(\nu)}, \quad y_k^{(\nu)} = V_{m_o+1}(y_{k1}^{(\nu)}) + y_{k2}^{(\nu)},$$

gdje je $x_{j2}^{(\nu)},\ y_{j2}^{(\nu)}$ $\ker(V_{m_o+1})$, $\nu=1,2,\dots;\ j=1,\dots,n;$ $k=1,\dots,m_o$ i ovi nizovi konvergiraju ka x_j, odnosno y_k. Stavimo

$$w_i^{(\nu)} = \sum_{j=1}^{n} E_j x_{ji}^{(\nu)} + \sum_{k=1}^{m_o} V_k y_{k1}^{(\nu)}, \quad \nu=1,2,\dots; \quad i=1,2.$$

Tada je

$$z = \lim_{\nu\to\infty} (V_{m_o+1}(y_{m_o+1} + w_1^{(\nu)})) + w_2^{(\nu)}). \tag{5.13}$$

Pošto operatore uzimamo iz komutativne familije operatora $\mathcal{K}$ vrijedi $B(\ker(A)) \subseteq \ker(A)$ i $E_B(\Delta)A = AE_B(\Delta)$, pa i $E_B(\Delta)(\ker(A)) \subseteq \ker(A)$ $(A,B \in \mathcal{K},\ \Delta \in \mathcal{A}(\overline{\mathbb{R}}\setminus\{0\}))$. Dakle $w_2^{(\nu)} \in \ker(V_{m_o+1})$, $\nu=1,2,\dots$, pa su sabirci u članovima niza čija se granična vrijednost pojavljuje u (5.13) međusobno ortogonalni, pa vrijedi

$$[z,z] = \lim \left\{ \left[V_{m_o+1}^2(y_{m_o+1}+w_1^{(\nu)}), y_{m_o+1}+w_1^{(\nu)}\right] + \left[w_2^{(\nu)}, w_2^{(\nu)}\right] \right\}.$$

Operator $-V_{m_o+1}^2$ je J-pozitivan pa je

$$\left[V_{m_o+1}^2 (y_{m_o+1} + w_1^{(\nu)}),\ y_{m_o+1} + w_1^{(\nu)}\right] \leqslant 0, \quad \nu=1,2,\dots,$$

a prema induktivnoj pretpostavci je $[w_2^{(\nu)}, w_2^{(\nu)}] \leqslant 0$. Time je dokazano da je $[z,z] \leqslant 0$, odnosno da vrijedi (5.12), a time i $F_- \subseteq \mathcal{P}_-$. Analogno se dokaže $F_+ \subseteq \mathcal{P}_+$. Primjenom teorema 1.11. na potprostore F_+ i F_- dobijamo maksimalan pozitivan potprostor M Kreinovog prostora H i za ovaj potprostor vrijedi

$$AM \subseteq A(F_-^{\perp}) \subseteq A((W^-)^{\perp}) \subseteq W^+ \subseteq F_+ \subseteq M \qquad (A \in \mathcal{K}_1)$$

$$TM \subseteq \mathrm{ran}(T) \subseteq F_+ \subseteq M \qquad (T \in \mathcal{T})$$

$$VM \subseteq V(F_-^{\perp}) \subseteq V(\mathrm{ran}(V)^{\perp}) = \{0\} \qquad (V \in \mathcal{V}).$$

Dakle maksimalan pozitivan potprostor M je invarijantan za sve operatore iz familije $\mathcal{K}$ iz TVRDNJE i time je TVRDNJA dokazana i dokaz teorema završen.

Operator A na Kreinovom prostoru H je J-hermitski ako i samo ako je operator A-tI $(t \in \mathbb{R})$ J-hermitski i neki potprostor Kreinovog prostora H je invarijantan u odnosu na A ako i samo ako je invarijantan u odnosu na A-tI $(t \in \mathbb{R})$, pa smo u prethodnom teoremu uslov da za operator A iz komutativne familije J-hermitskih operatora $\mathcal{H}$ postoji prirodan broj n(A) takav da je jedan od operatora $\pm A^{n(A)}$ J-pozitivan mogli zamijeniti uslovom da za operator A iz $\mathcal{H}$ postoji realan broj t(A) i prirodan broj n(A) takvi da je jedan od operatora $\pm (A-t(A)I)^{n(A)}$ J-pozitivan. Ovu primjedbu koristimo u sljedećem teoremu:

TEOREM 5.4. Neka je $\mathcal{H}$ konačna komutativna familija ograničenih pozitibilnih J-hermitskih operatora. Tada postoji maksimalan pozitivan potprostor M koji je invarijantan za sve operatore A iz $\mathcal{H}$.

Dokaz. Neka se familija $\mathcal{H}$ sastoji od operatora $A_1,\dots,A_m$. Dokažimo da bez ograničenja opštosti možemo uzeti da je spektar svakog od operatora A_j, $j=1,\dots,m$, realan. Neka $\sigma_1(A_j)$, $\sigma_2(A_j)$, $\sigma_3(A_j)$ označavaju respektivno dio spektra operatora A_j, $j=1,\dots,m$, koji leži na realnoj osi, iznad realne ose i ispod realne ose. Prema propoziciji 4.2. skupovi $\sigma_2(A_j)$ i $\sigma_3(A_j)$ sastoje se od konačno mnogo svojstvenih vrijednosti, pa su oni spektralni skupovi operatora A_j i vrijedi $\sigma_2(A_j)=\overline{\sigma_3(A_j)}$, $j=1,2,\dots,m$. Stavimo

$$E_{ij} = E(\sigma_i(A_j);\ A_j) \qquad (i=1,2,3,\ j=1,\dots,m).$$

Prema teoremu 1.34′. operator E_{1j} je J-hermitska projekcija, a za operatore E_{2j} i E_{3j} vrijedi $E_{2j} = (E_{3j})^+$, $j=1,\dots,m$. Svi operatori E_{ij} $(i=1,2,3,\ j=1,\dots,m)$ međusobno komutiraju i komutiraju sa svim operatorima A_j $(j=1,\dots,m)$. Vrijedi

$$I = \prod_{j=1}^{m} E_{1j} + \sum_{j=2}^{n}(E_{2j} + E_{3j})\prod_{k=1}^{j-1} E_{1k} + E_{21} + E_{31}.$$

Stavimo

$$H_{m+1} = \Big(\prod_{j=1}^{m} E_{1j}\Big)H,\quad H_j = \Big((E_{2j} + E_{3j})\prod_{k=1}^{j-1} E_{1k}\Big)H, \quad (j=2,\dots,m)$$

$$H_1 = (E_{21} + E_{31})H$$

Potprostori H_j $(j=1,\dots,m+1)$ su međusobno J-ortogonalni i svaki od njih je prema propoziciji 1.22. J-ortogonalno dopunjiv, pa je $(H_j,[\cdot,\cdot])$ $(j=1,\dots,m+1)$ Kreinov prostor i svaki potprostor H_j $(j=1,\dots,m+1)$ je invarijantan u odnosu na svaki operator A_k, $k=1,\dots,m$. Vrijedi $\sigma(A_j|H_{m+1})\subseteq \mathbb{R}$ $(j=1,\dots,m)$. Stavimo

$$H_{ij}=\Big(E_{ij}\prod_{k=1}^{j-1} E_{1k}\Big)H \quad (i=2,3;\ j=2,\dots,m) \text{ i } H_{i1}=E_{i1}H \quad (i=2,3)$$

Očigledno vrijedi $H_j = H_{2j} + H_{3j}$ $(j=1,\dots,m)$, a prema teoremu 1.34'. potprostori H_{ij} $(i=2,3;\ j=1,\dots,m)$ su neutralni i na osnovu propozicije 1.24. potprostori H_{2j} i H_{3j} $(j=1,\dots,m)$ čine dualan par potprostora. Na osnovu zadnje osobine zaključujemo da je neutralan potprostor H_{2j} maksimalan pozitivan potprostor Kreinovog prostora $H_{2j} + H_{3j} = H_j$ $(j=1,\dots,m)$. Očigledno je da vrijedi

$$A_k(H_{ij}) \subseteq H_{ij} \qquad (i=2,3;\ j=1,\dots,m)$$

Ako sada dokažemo da komutativna familija $\{A_j | H_{m+1};\ j=1,\dots,m\}$ J-hermitskih operatora sa realnim spektrom ima maksimalan pozitivan potprostor M_{m+1} invarijantan za sve operatore $A_j | H_{m+1}$, $j=1,\dots,m$ onda će prema korolaru 1.10. i naprijed navedenim činjenicama potprostor

$$M = M_{m+1} + H_{2m} + H_{2,m-1} + \dots + H_{21}$$

biti maksimalan pozitivan potprostor Kreinovog prostora H i vrijedi $A_j M \subseteq M$ $j=1,\dots,m$. Dakle u daljem možemo pretpostaviti da svi operatori A_j, $j=1,\dots,m$ imaju realan spektar, pa za svaki operator A_j postoji realan pozitivirajući polinom f_j sa realnim nulama. Neka su s_{kj}, $k=1,2,\dots,n_j$ međusobno različite nule polinoma f_j, $j=1,\dots,m$ i neka su Δ_{kj}, $k=1,2,\dots,n_j$; $j=1,\dots,m$ intervali sa osobinama $\Delta_{kj} \in \mathcal{A}(\overline{\mathbb{R}} \setminus N(f_j))$ i $\Delta_{kj} \cap N(f_j) = \{s_{kj}\}$, $k=1,2,\dots,n_j$; $j=1,\dots,m$. Prema definiciji svojstvene spektralne funkcije $E_j = E_{A_j}$ operatora A_j operatori $E_j(\Delta_{kj})$, A_i $(k=1,\dots,n_j\ ,\ j,i=1,\dots,m)$ međusobno komutiraju. Ova činjenica nam je važna za utvrđivanje invarijantnosti određenih potprostora u odnosu na operatore A_j ,

$j=1,\ldots,m$. Neka je $v_{kj} = v(s_{kj},f_j)$ $k=1,\ldots,n_j$; $j=1,\ldots,m$. Na osnovu osobina (3.1o) i (3.1o') odnosno njima analognih osobina za J-hermitske pozitibilne operatore slijedi da je jedan od operatora $\pm(A_j - s_{kj}I)^{v_{kj}}$ J-pozitivan na potprostoru $E_j(\Delta_{kj})H$, $k=1,\ldots,n_j$; $j=1,\ldots,m$. Označimo sa $H_1,\ldots,H_r$ sve potprostore iz familije potprostora

$$\left\{\bigcap_{j=1}^{m} E_j(\Delta_{k(j)j})H;\ (k(1),\ldots,k(m))\in\prod_{j=1}^{m} Q_j,\ Q_j = \{1,\ldots,n_j\}\right\}$$

Ovi potprostori su međusobno J-ortogonalni, invarijantni u odnosu na operatore $A_1,\ldots,A_m$ i vrijedi

$$H_1 + \ldots + H_r = H$$

Na svakom od potprostora $H_\nu(\nu=1,\ldots,r)$ za svaki operator A_j, $j=1,\ldots,m$ postoji realan broj $s_{k(j)j}$ i prirodan broj $v_{k(j)j}$ tako da je jedan od operatora $\pm(A_j - s_{k(j)j}I)^{v_{k(j)j}}$ J-pozitivan na prostoru $H_\nu(\nu=1,\ldots,r)$. Prema primjedbi poslije teorema 5.3. postoji maksimalan pozitivan potprostor M_ν prostora H_ν, $\nu=1,\ldots,r$ koji je invarijantan u odnosu na operatore $A_1,\ldots,A_m$. Potprostor

$$M_1 + \ldots + M_r = M$$

je prema korolaru 1.1o. maksimalan pozitivan potprostor prostora H i invarijantan je u odnosu na operatore $A_1,\ldots,A_m$. Time je teorem dokazan.

Uz jednu dodatnu pretpostavku dokazaćemo tvrdnju teorema 5.4. za komutativnu familiju pozitibilnih J-hermitskih operatora proizvoljne moći. U odnosu na kanonsko razlaganje $H = H_+ \dot{+} H_-$ Kreinovog prostora H J-hermitskom operatoru A odgovara matrica

$$\begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ -A_{12}^* & A_{22} \end{pmatrix}$$

pri čemu je $A_{11} = P_+A|H_+$, $A_{22} = P_-A|H_-$, $A_{12} = P_+A|H_-$, operator $A_{12}^*: H_+ \longrightarrow H_-$ je hermitski adjungovan operatoru $A_{12}: H_- \longrightarrow H_+$ i vektor $x = x_+ + x_- \in H$ pišemo kao $x = \begin{pmatrix} x_+ \\ x_- \end{pmatrix}$. Ako je M maksimalan pozitivan potprostor prostora H i $K \in B_1(H_+, H_-)$ njegov ugaoni operator ($M = G[K]$), onda se lako vidi da je potprostor M invarijantan u odnosu na operator A ako i samo ako vrijedi

$$-A_{12}^* + A_{22}K = K(A_{11} + A_{12}K) \tag{5.14}$$

Stvarno, zbog $M = G[K]$ za $x \in H_+$ vektor

$$A(x + Kx) = (A_{11} + A_{12}K)x + (-A_{12}^* + A_{22}K)x$$

pripada potprostoru M akko je $-A_{12}^* + A_{22}K = K(A_{11} + A_{12}K)$.

TEOREM 5.5. Neka je $\mathcal{H}$ komutativna familija ograničenih pozitibilnih J-hermitskih operatora i neka postoji takvo kanonsko razlaganje prostora H, $H = H_+ + H_-$, da je za svaki operator A iz $\mathcal{H}$ operator P_+AP_- kompaktan. Tada postoji maksimalan pozitivan potprostor M prostora H koji je invarijantan za sve operatore A iz $\mathcal{H}$.

Dokaz. Na osnovu primjedbe koja je prethodila teoremu, teorem će biti dokazan ako dokažemo da postoji operator $K_0 \in B_1(H_+, H_-)$ koji zadovoljava jednakost (5.14) za sve operatore A iz $\mathcal{H}$. Neka je $A_1, \ldots, A_m$ proizvoljna konačna podfamilija familije $\mathcal{H}$. Označimo sa

$Z(A_1,\ldots,A_m)$ skup svih kontrakcija K iz $B_1(H_+,H_-)$ koje zadovoljavaju jednakost (5.14). Prema teoremu 5.4. skup $Z(A_1,\ldots,A_m)$ nije prazan. Pretpostavka da je P_+AP_- ($A\in\mathcal{H}$) kompaktan operator povlači da je skup $Z(A_1,\ldots,A_m)$ zatvoren u odnosu na slabu konvergenciju operatora. Naime, kompaktan operator prevodi slabo konvergentan hiperniz vektora u konvergentan hiperniz vektora ([4] VI. 9.30. str.515) pa ako hiperniz $(K_a)_{a\in\mathcal{J}}$ operatora iz $Z(A_1,\ldots,A_m)$ slabo konvergira ka operatoru K (jasno je da $K\in B_1(H_+,H_-)$) onda hiperniz vektora $(A_{12}K_ax)_{a\in\mathcal{J}}$ konvergira vektoru $A_{12}Kx$, $x\in H_+$ proizvoljan vektor. Odavde slijedi da hiperniz $(K_aA_{12}K_ax)_{a\in\mathcal{J}}$ slabo konvergira ka vektoru $KA_{12}Kx$, $x\in H_+$. Granična vrijednost po $a\in\mathcal{J}$, u slaboj konvergenciji lijeve strane jednakosti

$$-A_{12}^{*}+A_{22}K_ax=K_a(A_{11}x+A_{12}K_ax)\qquad (a\in\mathcal{J},\ A\in\{A_1,\ldots,A_m\})$$

je vektor $-A_{12}^{*}x+A_{22}Kx$, a prema prethodnoj rečenici granična vrijednost po $a\in\mathcal{J}$ u slaboj konvergenciji desne strane posljednje jednakosti je $K(A_{11}x+A_{12}Kx)$, dakle $K\in Z(A_1,\ldots,A_m)$. Familija skupova $Z(A_1,\ldots,A_m)$ ($m=1,2,\ldots$; $A_1,\ldots,A_m\in\mathcal{H}$) je dakle familija slabo zatvorenih nepraznih podskupova jedinične kugle $B_1(H_+,H_-)$ i ova familija očigledno ima osobinu konačnih presjeka. Kako je jedinična kugla $B_1(H_+,H_-)$ slabo kompaktan skup ([4] , VI. 9.6. str.512) gornja familija ima neprazan presjek, pa ako je K_o operator iz tog presjeka onda $K_o\in B_1(H_+,H_-)$ i operator K_o zadovoljava jednakost (5.14) za sve operatore A iz $\mathcal{H}$. Teorem je dokazan.

Jednostavno se vidi da i za pozitibilne J-unitarne operatore vrijede teoremi analogni teoremima 5.3., 5.4. i 5.5. Dovoljno je primijetiti da je potprostor

M Kreinovog prostora H invarijantan u odnosu na ograničen J-hermitski operator A ako i samo ako je invarijantan u odnosu na njegovu Cayle jevu transformaciju J-unitaran operator U.

TEOREM 5.3'. Neka je $\mathcal{P}$ komutativna familija J-unitarnih operatora i neka za svaki operator U iz $\mathcal{P}$ postoji kompleksan broj $\varepsilon(U) \in C$, $\varepsilon(U) \notin \sigma(U)$ i prirodan broj $n(U)$ takav da je jedan od operatora $\pm((\overline{\varepsilon(U)}U - \varepsilon(U)U^+)/2i)^{n(U)}$ J-pozitivan. Tada postoji maksimalan pozitivan potprostor koji je invarijantan u odnosu na sve operatore U, U^{-1} $(U \in \mathcal{P})$.

Dokaz. Cayle jeva transformacija

$$A = i(U + \varepsilon(U)I)(U - \varepsilon(U)I)^{-1} \quad (i^2=-1) \qquad (5.15)$$

J-unitarnog operatora U je ograničen (jer $\varepsilon(U) \notin \sigma(U)$) J-hermitski operator i lako se vidi da je jedan od operatora $\pm A^{n(U)}$ J-pozitivan. Naime za sve x iz H vrijedi

$$\begin{aligned}[A^{n(U)}x,x] &= [(i(U + \varepsilon(U)I)(U - \varepsilon(U)I)^{-1})^{n(U)}x,x] = \\ &= [i^{n(U)}(U^+ - \overline{\varepsilon(U)}I)^{n(U)}(U + \varepsilon(U)I)^{n(U)}y,y] = \\ &= [((\overline{\varepsilon(U)}U - \varepsilon(U)U^+)/i)^{n(U)}y,y]\end{aligned}$$

gdje je stavljeno $y = (U - \varepsilon(U)I)^{-n(U)}x$. Dakle familija Cayle jevih transformacija datih sa (5.15) operatora U iz $\mathcal{P}$ zadovoljava uslove teorema 5.3. pa postoji maksimalan pozitivan potprostor M invarijantan u odnosu na sve ove Cayle jeve transformacije, pa prema napomeni prije teorema i u odnosu na sve operatore U iz $\mathcal{P}$. Prema korolaru 1.29. potprostor M je invarijantan i u odnosu na sve operatore U^{-1}, $U \in \mathcal{P}$. Tako je teorem dokazan.

TEOREM 5.4. Neka je $\mathcal{P}$ konačna komutativna familija pozitibilnih J-unitarnih operatora sa osobinom $C \not\subseteq \sigma(U)$ $(U \in \mathcal{P})$. Tada postoji maksimalan pozitivan potprostor M koji je invarijantan za sve operatore U, U^{-1} $(U \in \mathcal{P})$.

Dokaz ovog teorema je analogan sa dokazom teorema 5.3. s tim da pozitibilnost Cayle jevih transformacija operatora iz $\mathcal{P}$ slijedi iz dokaza teorema 4.1.

TEOREM 5.5. Neka je $\mathcal{P}$ komutativna familija pozitibilnih J-unitarnih operatora sa osobinom $C \not\subseteq \sigma(U)$ $(U \in \mathcal{P})$ i neka postoji takvo kanonsko razlaganje prostora H, $H = H_+ + H_-$, da je za svaki operator U iz $\mathcal{P}$ operator $P_+ U P_-$ kompaktan. Tada postoji maksimalan pozitivan potprostor M koji je invarijantan u odnosu na operatore U, U^{-1} $(U \in \mathcal{P})$.

Dokaz se provodi na isti način kao i dokaz teorema 5.5. Treba samo primijetiti da je maksimalan pozitivan potprostor $M = G[K]$, $K \in B_1(H_+, H_-)$ invarijantan u odnosu na operator U ako i samo ako vrijedi

$$U_{21} + U_{22}K = K(U_{11} + U_{12}K)$$

pri čemu je

$$\begin{pmatrix} U_{11} & U_{12} \\ U_{21} & U_{22} \end{pmatrix}$$

matrica koja odgovara operatoru U u kanonskom razlaganju $H = H_+ \dot{+} H_-$ prostora H.

L I T E R A T U R A

1. Ando, T., Linear Operators in Krein spaces, Lecture Notes, Hokkaido Univesity, Sapporo, 1979.
2. Bognár, J., Indefinite Inner Product Spaces, Springer- Verlag, Berlin and New York, 1974.
3. Бирман, М. Ш., Соломяк. М. З., Спектральная теория самосопряженных операторов в гильбертовом пространстве, Изд-во Ленингр. ун-та, 1980.
4. Dunford N.; Schwartz J. T., Linear Operators, Interscience Publishers, Inc., New York, 1958 (Part I General theory); 1963 (Part II Spectral theory. Selfadjoint operators in Hilbert space).
5. Harvey, B. N., A spectral theorem for J-nonnegative operators, Trans. Amer. Math. Soc., 257(1980), 387-396.
6. Iohvidov, I. S., Krein, M. G., Langer, H., Introduction to the Spectral Theory of Operators in Spaces with an Indefinite Metric, Akademie-Verlag, Berlin, 1982.
7. Крейн, М. Г., Лангер, Г. К., О спектральной функции самосопряженного оператора в пространстве с индефинитной метрикой, Докл. Акад. наук СССР, 152(1963), 39-42.
8. Jonas, P., Eine Bedingung für die Existenz einer Eigenspektralfunktion für gewisse Automorphismen lokalkonvexer Räume, Math. Nachr., 45(1970), 143-160.
9. Jonas, P., On the functional calculus and the spectral function for definitizable operators in Krein space, Beiträge Anal., 16(1981), 121-135.
10. Kelly, J. L., Namioka, I., Linear Topological Spaces, Springr-Verlag, Berlin and New York, 1976.
11. Köthe, G., Topological Vector Spaces, vol. 1, Springer-Verlag, Berlin and New York, 1969.
12. Kurepa, S., Funkcionalna analiza. Elementi teorije operatora, Školska knjiga, Zagreb, 1981.
13. Kurepa, S., Konačno dimenzionalni vektorski prostori i primjene, Tehnička knjiga, Zagreb, 1967.
14. Langer, H., Spektraltheorie linearer Operatoren in J-Räumen und einige Anwendungen auf die Schar $L(\lambda) = \lambda^2 I + \lambda B + C$, Habilitationsschrift, Tech. Univrsität Dresden, 1965.

15. Langer, H., Zur Spektraltheorie J-selbstadjungierter Operatoren, Math. Annalen 146(1962),60-85.

16. Langer, H., Invariante Teilräume definisierbarer J-selbstadjungierter Operatoren, Ann. Acad. Sci. Fenn. Ser. AI, 475(1971).

17. Langer, H., Spectral functions of definitizable operators in Krein spaces, In: Functional Analysis, Proceedings, Dubrovnik 1981, Lecture Notes Math. (948) Springer-Verlag, Berlin and New York, 1982.

18. Lorch, E. R., On a calculus of operators in reflexsive vector spaces, Trans. Amer. Math. Soc., 45(1939),217-234.

19. Мергелян, С. Н., Равномерные приближения функций комплексного переменного, Успехи мат. наук (Н.С.) т. VII, вып. 2 (1948), 31-122.

20. Mitrinović, D. S., Kompleksna analiza, Građevinska knjiga, Beograd, 1973.

21. Rudin, W., Real and Complex Analysis, McGraw-Hill London, Mladinska knjiga Ljubljana,

22. Свешников, А. Г., Тихонов, А. Н., Теория функций комплексной переменной, Наука, Москва, 1974.

23. Kato, T., Pertubation Theory for Linear Operators, Springer-Verlag, Berlin and New York, 1966.

24. Натансон, И. П., Теория функций вещественной переменной, Наука, Москва, 1974.

INDEKS

Cayleyeva transformacija 48
definitan tip tačke 55
definitan potprostor 10
degenerisan potprostor 10
dualan par potprostora 33
J-adjungovani operator 28
J-hermitski operator 30
J-ortogonalna projekcija 26
J-pozitivan operator 35
J-spektralna funkcija 56
J-unitaran operator 37
J-ortogonalno dopunjiv potprostor 25
kanonsko razlaganje 7
Kreinov prostor 2
kritična tačka 56,100
maksimalan semidefinitan potpr. 11
pozitivan tip tačke 55
pozitivirajuća funkcija op. 70,125
pozitivirajući polinom 123
Pontrjaginov prostor 9
pozitibilan operator 70,123
pozitivan vektor 9
pozitivan potprostor 10
Rieszov indeks 49
skalarni produkt 1
svojstvena spektralna funkcija 64
trigonometriski polinom 78,81
ugaoni operator 15
$w_{[,]}$-topologija 2

POPIS NEKIH OZNAKA

$L(H)$ skup svih ograničenih operatora na prostoru H
$\perp$, $B^{\perp}$, $(\perp)$, $B^{(\perp)}$, $B \subseteq H$ 12
$\dot{\perp}$ 138
$Cl(B)$ 12
$\bar{B}$, B^{*} $(B \subseteq \mathbb{C})$ 31, 39
$G[K]$ 13
$B_1(D_+, H_-)$ 13
$\mathcal{F}(B)$, $B \subseteq \mathbb{C}$; $\mathcal{F}(T)$, T op 41
f^{*} 41
$E(\sigma)$ 43
$supp(E)$ 55, 94
W_{α}, $W_{\alpha}^{\pm}$ 59
$\mathcal{A}(S \setminus c)$ 55
C, $\overline{\mathbb{R}}$, $\mathbb{C}$ 55
$A(z_0)$, $D_n(z_0)$ 80,81
$D_{n,q}(z_0)$, $\|\cdot\|_{n,q,z_0}$ 81
$A_q(z_0)$ 81
$\mathcal{C}_q(z_0)$ 82
$\mathcal{D}_{m,q}(z_0)$, $\|\cdot\|'_{m,q,z_0}$ 83
$\mathcal{C}(z_j, q_j;\ j=1,\dots,\nu)$ 87
$N(g)$ 70
$v(z,p)$ 109
$c(U)$ 100
$\mathcal{C}(C \setminus \sigma)$, $\|\cdot\|$ 96
$\mathcal{C}(\sigma(U); z_j, q_j;\ j=1,\dots,m)$ 104